PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + a\,y + (a-1)\,z = a \end{cases}$

donde a es un parámetro real. Se pide obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible. *(5 puntos)*
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$. *(4 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a = a^2 - 3a + 2$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Por Ruffini,} \quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \underline{|0} \\ 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & \underline{|0} & \end{array} \qquad \text{Soluciones: } a = 1 \quad y \quad a = 2$$

Entonces,

para a ≠ 1, 2**, $|A| \neq 0$ → ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas → **Sistema Compatible Determinado

***para a = 1** , $|A| = 0$ → ran(A) ≤ 2*

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) → ran(A´) = 2

*Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas → **Sistema Compatible Indeterminado.***

para a = 2, $/A/ = 0 \rightarrow ran(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A, sabemos que /A/ =0 (el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Calculemos el rango de A´, añadiendo al menor anterior de orden 2 no nulo la 3ª fila y la 4ª columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por tanto, ran(A) $\neq$ *ran(A´)* $\rightarrow$ ***Sistema Incompatible.***

Respondamos a las preguntas,

a) ***El sistema es compatible para a*** $\neq$ ***2.***
(para a $\neq$ *1, 2 es compatible determinado y para a = 1 es compatible indeterminado)*

b) Soluciones para a = 1
Según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales z e y. Es decir,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

c) Soluciones para a = 0
Si a = 0, a $\neq$ *1, 2, el sistema es compatible determinado.*
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 1 \\ \quad - y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \end{cases} , \quad |A| = a^2 - 3a + 2 \;\Big|_{a=0} = 2. \quad Por\ Cramer:$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$$

Para a = 0 la solución del sistema es: x = y = z = ½.

PROBLEMA A.2. Se tienen el plano π: $x - y + z - 3 = 0$, la recta $s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 1, 1)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π. *(4 puntos)*

b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s. *(3 puntos)*

c) Discute si el punto (3,2,1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1). *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Recta r? / $A \in r$, $r \cap s \neq \varnothing$ y $r // \pi$

Como $r // \pi \rightarrow \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$ $\left(\vec{v_r} \equiv \text{vector director de } r.\ \vec{n_\pi} \equiv \text{vector perpendicular al plano } \pi\right)$

$$\vec{n_\pi} = (1,-1,1)$$

Como r corta a s, obtengamos un punto cualquiera de la recta s:

$$s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \rightarrow P_s(2\lambda, \lambda, 0)$$

$A \in r$ y $P_s \in r \rightarrow \overrightarrow{AP_s}$ es $\vec{v_r}$

$\overrightarrow{AP_s} = (2\lambda-1, \lambda-1, -1) = \vec{v_r}$

como $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{n_\pi} = 0 \rightarrow (2\lambda-1, \lambda-1, -1)\cdot(1,-1,1) = 0$

$$2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0$$
$$\lambda - 1 = 0$$
$$\lambda = 1$$

Para $\lambda = 1$, $P_s(2, 1, 0)$ y $\vec{v_r} = (1, 0, -1)$. *Por tanto,* ***la ecuación de la recta pedida será:***

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

b) ¿Plano σ? / $A \in \sigma$, $\sigma \perp \pi$ y $\sigma // s$

Para obtener la ecuación del plano σ necesitamos un punto y dos vectores directores de σ.

como $A \in \sigma \rightarrow P_\sigma = A = (1,1,1)$

$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{u_\sigma} = \vec{n_\pi} = (1,-1,1)$

$\sigma // s \rightarrow \vec{v_\sigma} = \vec{v_s} = (2,1,0)^*$

(a partir de la ecuación paramétrica de la recta s obtenida en el apartado (a))*

Ecuación del plano σ,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(desarrollando por la } 1^a \text{ fila)}$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)(-2) + (z-1)(1+2) = 0$$

$$-x+1+2y-2+3z-3=0$$
$$-x+2y+3z-4=0 \ \rightarrow \ x-2y-3z+4=0$$

Solución: plano σ: x – 2 y – 3 z + 4 = 0

c) ¿recta t? / (5, 3, 1) ∈ t y t // s.

$$\text{recta} \quad t:\left\langle \begin{array}{l} \text{punto} \quad (5,3,1) \\ \vec{v_t} \ \left(\text{como } t \,//\, s \ \rightarrow \ \vec{v_t}=\vec{v_s}\right) \ \rightarrow \ \vec{v_t}=(2,1,0) \end{array} \right.$$

$$\text{Por tanto,} \quad t:\begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=3+\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=1 \end{cases}$$

Veamos si el punto (3, 2, 1) ∈ t

$$\begin{cases} 3=5+2\lambda \\ 2=3+\lambda \\ 1=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2=2\lambda \\ -1=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \end{cases} \qquad \text{Solución} \quad \lambda=-1$$

Por tanto (3, 2, 1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1).

PROBLEMA A.3. Consideramos la función $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x \cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$. *(2 puntos)*

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. *(4 puntos)*

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ *(4 puntos)*

Solución:

a) Para $x = 1$, $f(1) = 22$.

$22 = a \,.\, 1^3 + b \,.\, 1^2 + c \,.\, 1 \,.\, \cos(\pi \,.\, 1)$

$22 = a + b + c \,.\, (-1)$

$22 = a + b - c$

Solución: la relación entre los coeficientes es $a + b - c = 22$.

b) P es el punto de $y = f(x)$ cuando $x = 1$; según el apartado anterior $P(1, 22)$.

Para que la tangente a $y = f(x)$ en P sea horizontal, debe ser $y'_{x=1} = 0$

$y' = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c\cos(\pi x) + c\,x\,(-sen(\pi x))\,\pi = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c\cos(\pi x) - \pi c\,x\,sen(\pi x)$

$y'_{x=1} = 3\,a\,1^2 + 2\,b\,1 + c\cos(\pi\,1) - \pi\,c\,1\,sen(\pi\,1) = 3a + 2b - c$

Solución: la relación entre los coeficientes es $3\,a + 2\,b - c = 0$.

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$. *Calculemos* $\int x\cos(\pi x)\,dx$, *la resolvemos por partes,*

$$\int x\cos(\pi x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \quad \rightarrow \quad du = dx \\ dv = \cos(\pi x)\,dx \quad \rightarrow \quad v = \int \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,sen(\pi x) \end{array}\right\} =$$

$$= x\,\frac{1}{\pi}\,sen(\pi x) - \int \frac{1}{\pi}\,sen(\pi x)\,dx = \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int sen(\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi x)\right)\right] = \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}$$

Finalmente,

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = \left(\frac{1\,.\,sen(\pi\,.\,1)}{\pi} + \frac{\cos(\pi\,.\,1)}{\pi^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{0\,.\,sen(\pi\,.\,0)}{\pi} + \frac{\cos(\pi\,.\,0)}{\pi^2}\right) = \left(\frac{1\,.\,0}{\pi} + \frac{-1}{\pi^2}\right) - \left(0 + \frac{1}{\pi^2}\right) == \frac{-1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$$

Solución: $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$

PROBLEMA B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $A\,B = A$ y $B\,A = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. *(4 puntos)*

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, cumpla que $B^2 = B$ pero $A\,B \neq A$ y $B\,A \neq B$ *(2 puntos)*

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, Obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ *(4 puntos)*

Solución:

a) A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $A\,B = A$ y $B\,A = B$, ¿$A^2 = A$? y ¿$B^2 = B$?

Consideramos $A\,B = A$ (1) y $B\,A = B$ (2)

$A^2 = A\,A = \{por\ (1)\} = (A\,B)\,A = \{propiedad\ asociativa\} = A\,(B\,A) = \{por\ (2)\} = A\,B = \{por\ (1)\} = A$

Por tanto, $A^2 = A$

$B^2 = B\,B = = \{por\ (2)\} = (B\,A)\,B = \{propiedad\ asociativa\} = B\,(A\,B) = \{por\ (1)\} = B\,A = \{por\ (2)\} = B$

Por tanto, $B^2 = B$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿$a, b \in \Re$ / $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ *cumpla* $B^2 = B, AB \neq A$ y $BA \neq B$?

$$B^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix}$$

$$Si\ B^2 = B \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$a^2 = a \quad \rightarrow \quad a^2 - a = 0 \quad \rightarrow \quad a\,(a-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1 \end{array} \right.$$

$$b^2 = b \quad \rightarrow \quad b^2 - b = 0 \quad \rightarrow \quad b\,(b-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} b = 0 \\ b - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1 \end{array} \right.$$

$$Como,\ además,\ a + b = 1 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \quad y \quad b = 1 \\ o \\ a = 1 \quad y \quad b = 0 \end{array} \right. \qquad (m)$$

Como $AB \neq A$,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad a \neq 1$$

Como $BA \neq B$,

$$BA = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad b \neq 0$$

De las dos soluciones obtenidas en (m), la que cumple que $a \neq 1$ *y* $b \neq 0$ *es* $a = 0$ *y* $b = 1$.

Solución: los valores de los parámetros buscados son $a = 0$ y $b = 1$.

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3,$

Calculemos:

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{El factor 2 que se repite en la } 1^{a} \text{ columna sale fuera del determinante} = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{Como la } 1^{a} \text{ columna es suma de dos, el determinante se calcula como suma de dos determinantes} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{En el último determinante } C_1 = C_2 + C_3, \text{ por tanto es nulo} = 3 + 0 = 3$$

Por tanto, $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6$ *y* $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$

PROBLEMA B.2. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$ *(4 puntos)*
c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r.

Debemos resolver el sistema que determina a r.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\text{como} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-1=3\neq 0, \quad \text{el sistema a resolver es} \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y=8+z \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8+z & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{12-8-z}{3} = \frac{4-z}{3} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8+z \end{vmatrix}}{3} = \frac{8+z-3}{3} = \frac{5+z}{3} \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas "complicadas"}$$

Escogemos otro menor no nulo,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\text{como} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1\neq 0, \quad \text{el sistema a resolver es} \begin{cases} y=3-x \\ 4y-z=8-x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y del la 1ª ecuación en la 2ª,
4 (3 – x) – z = 8 – x, hay que despejar z, 12 – 4 x – z = 8 – x; z = 4 – 3 x

$$\textbf{Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son:} \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$$

b) ¿Plano π? / $\pi // r$ y los puntos (5,0,1) y (4,1,0) $\in \pi$

Para el plano π necesitamos un punto y dos vectores directores,

Punto de π (5,0,1)

Como $\pi // r \;\rightarrow\; \vec{v_1}=\vec{v_r}=(1,-1,-3)$, *de las ecuaciones paramétricas de r obtenidas en (a).*

Con los dos puntos del plano π, $\vec{v_2}=(5,0,1)-(4,1,0)=(1,-1,1)$

Ecuación del plano π,

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-0 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{desarrollando por la } 1^a \text{ fila})$$

$$(x-5)\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$(x-5)\,(-1-3) - y\,(1+3) + (z-1)\,(-1+1) = 0$$

$$-4(x-5) - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + 20 - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

Solución: $\boldsymbol{\pi: x + y - 5 = 0}$

c) ¿$d(r,\pi)$?

Como $r \parallel \pi$ *(según el apartado (b)),* $d(r,\pi) = d(P_r,\pi)$

Pr (0,3,4) (según las ecuaciones paramétricas del la recta r obtenidas en (a))

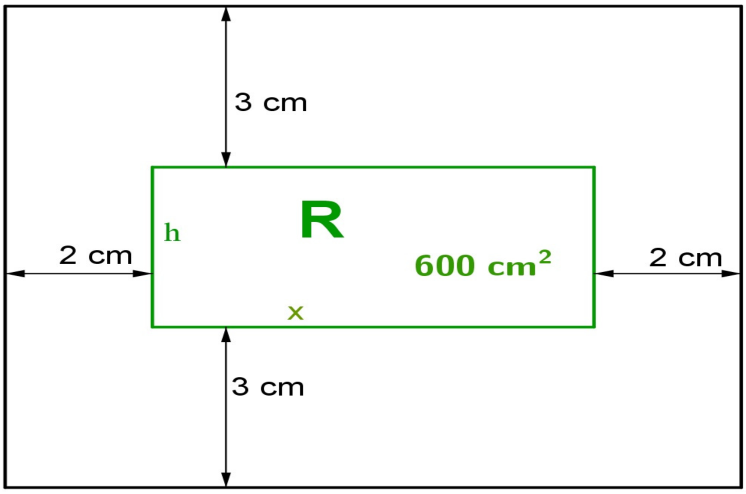
$$d(P_r,\pi) = \frac{|0+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Solución: $\boldsymbol{d(r,\pi) = \sqrt{2}}$ ***u.l.***

PROBLEMA B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R. *(3 puntos)*
b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima. *(5 puntos)*
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima. *(3 puntos)*

Solución:
La representación gráfica del ejercicio es:



a) Área de la cartulina en función de x (base de R).

$A_R = 600\ cm^2 \;\rightarrow\; x \,.\, h = 600 \;\rightarrow\; h = \dfrac{600}{x}$ *(como x es la longitud de la base, x > 0)*

Entonces, las medidas de la cartulina son: base $= x + 4$ *y* altura $= \dfrac{600}{x} + 6$

El área de la cartulina será: $(x+4)\left(\dfrac{600}{x}+6\right) = 600 + 6x + \dfrac{2400}{x} + 24 = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}$

Solución: $A_{cartulina} = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}, \quad x > 0$

b) ¿x? / $A_{cartulina}$ sea mínima.

Por el apartado (a) sabemos que $A_{cartulina} = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}, \quad x > 0$

Obtengamos el mínimo de esta función,

$$A'_{cartulina} = 6 - \frac{2400}{x^2}$$

$$A'_{cartulina} = 0 \;\rightarrow\; 6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; 6x^2 - 2400 = 0 \;\rightarrow\; 6x^2 = 2400 \;\rightarrow\; x^2 = 400$$

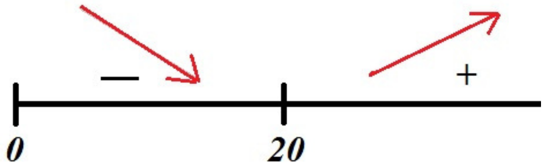
$$x = \pm\sqrt{400} = \pm\, 20$$

Como $x > 0$, *entonces* $x = 20$

Para determinar si para este valor de x el área es mínima, estudiemos la monotonía de $A_{cartulina}$
Hay que estudiar el signo de $A'_{cartulina}$ *en los intervalos* $(0, 20)$ *y* $(20, +\infty)$

x	A'_c
1	$6-\dfrac{2400}{1^2}=-2394<0$
21	$6-\dfrac{2400}{21^2}=0'55..>0$

Por tanto:



Luego, en $x = 20$ se alcanza el mínimo relativo que, además, es el mínimo absoluto ya que la función A_c es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

Solución: el área de la cartulina es mínima para $x = 20$ cm.

c) Dimensiones de dicha cartulina.

Para $x = 20$, (según calculamos en el apartado (a)) las dimensiones de la cartulina son:

base $= 20 + 4 = 24$ *cm*   *y*   *altura* $= \dfrac{600}{20}+6 = 36$ *cm*

Solución: las dimensiones de la cartulina de área mínima pedida son 24 cm de ancho y 36 cm de alto.