PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x \quad + z = 5 \\ -a\,x + y - z = 1 \end{cases}$

donde *a* es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado. *(2 puntos)*
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$. *(4 puntos)*
c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado. *(4 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a - 1 = -a$$

$$-a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0$$

Entonces,

para a ≠ 0**, $/A/ \neq 0$ → ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas → **Sistema Compatible Determinado

***para a = 0**, $/A/ = 0$ → ran(A) ≤ 2*

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) → ran(A´) = 2

*Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas → **Sistema Compatible Indeterminado.***

Respondamos a las preguntas,

a) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible determinado para $a \neq 0$.***

b) Solución para $a = \mathbf{3}$

Si $a = \mathbf{3}$, $a \neq \mathbf{0}$, *por lo que el sistema es compatible determinado*

El sistema es $\begin{cases} \quad\quad\; y - z = -2 \\ -x \quad\quad + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

De lo estudiado al principio, sabemos que /A/ = – a, por tanto (como a = 3) /A/ = – 3

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5+1+2+5}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+6-15+2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2-15+1}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Para $a = 3$ la solución del sistema es: { $x = -1$, $y = 2$, $z = 4$ }

c) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible indeterminado para $a = 0$.***

Del estudio realizado inicialmente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} y = -1 + z \\ -x = 5 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = -5 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

Finalmente, ***para $a = 0$ las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad \lambda \in \Re$

PROBLEMA A.2. Dados los puntos $A = (-1,2,\lambda)$, $B = (2,3,5)$ y $C = (3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

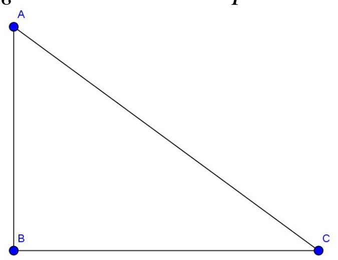
a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C. *(3 puntos)*

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿λ? / AC sea la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC.



Si AC es la hipotenusa $\rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AB} = (3,1,5-\lambda), \quad \overrightarrow{BC} = (1,2,-2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (3,1,5-\lambda)\cdot(1,2,-2) = 3+2-2(5-\lambda) = 5-10+2\lambda = -5+2\lambda$$

$$-5+2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 2\lambda = 5 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Solución: el segmento AC será la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC para $\lambda = 5/2$.

b) ¿Área del triángulo ABC para $\lambda = 6$?(A(– 1,2,6), B(2,3,5) y C = (3,5,3))

Calculamos el área triángulo de vértices A, B y C mediante la fórmula:

$$Área = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,1,-1) \qquad y \qquad \overrightarrow{BC} = (1,2,-1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{k} - \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} + 6\vec{j} = 5\vec{j} + 5\vec{k} = (0,5,5)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{0^2+5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$Área = \frac{1}{2}5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u.a.$$

c) ¿Plano π que contiene los puntos A(– 1,2,6), B(2,3,5) y C = (3,5,3)?

$$Del\ plano\ \pi\ conocemos \begin{cases} punto \quad A(-1,2,6) \\ vectores\ directores \begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,1,-1) \\ \overrightarrow{BC}(1,2,-2) \end{cases} \end{cases}$$

$$La\ ecuación\ del\ plano\ \pi\ será: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\,0 - (y-2)\,(-5) + (z-6)\,5 = 0 \quad \rightarrow \quad 5y-10+5z-30 = 0 \quad \rightarrow \quad 5y+5z-40=0 \quad \rightarrow \quad y+z-8=0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi : \ y + z - 8 = 0}$

PROBLEMA A.3. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ se pide obtener, **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(2 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, *(4 puntos)*

c) El área limitada por la curva y = f(x), el eje de abcisas y las rectas x = 2 y x = 3. *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio de f(x)

$$x^2-x=0 \;\rightarrow\; x(x-1)=0 \;\rightarrow\; \left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntota vertical,

Posibles A.V. x = 0 y x = 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=0 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \quad es\ A.V.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{\infty}=0 \;\rightarrow\; y=0 \quad \text{es la asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua,

Como la función es un cociente de polinomios y

grad (numerador) – grad (denominador) = 1 – 2 = – 1 ≠ 1

la función no tiene asíntota oblicua

Finalmente, ***Dom f(x) = ℜ ~{0, 1} y***

sus asíntotas son x = 0, x = 1 (asíntotas verticales) e y = 0 (asíntota horizontal).

b) Monotonía de f(x).

Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = ℜ ~{ 0, 1 }.

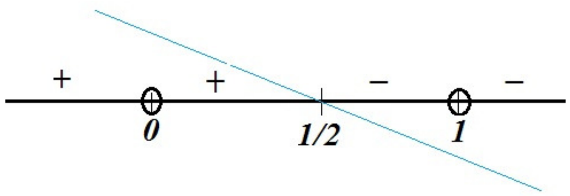
$$f'(x)=\frac{-1(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$-2x+1=0 \;\rightarrow\; 1=2x \;\rightarrow\; x=\frac{1}{2}$$

$$(x^2-x)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-x=0 \quad (\text{resuelta en } a)) \left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 1/2, por tanto:

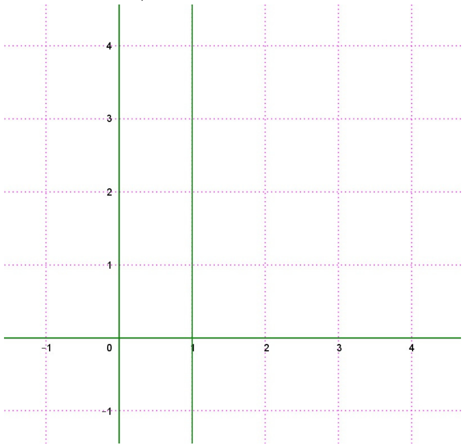


Por tanto, ***f(x) es creciente en (– ∞, 0) ∪ (0 , ½) y decreciente en (½ , 1) ∪ (1 , + ∞).***

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función $f(x)$,

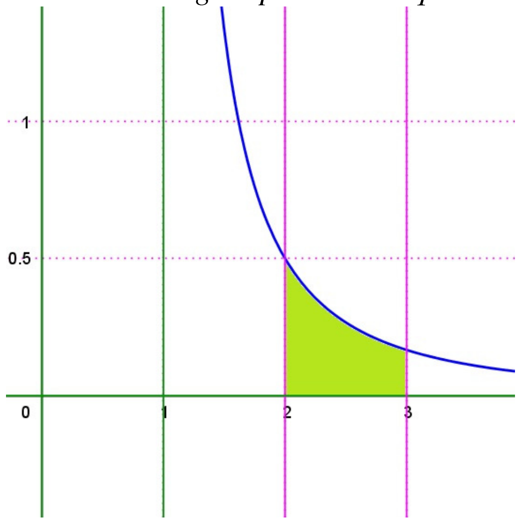
Conocemos sus asíntotas y su monotonía,



Como el área a calcular está limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 3$; la función es decreciente para $x > 1$ para representar el área basta con calcular la un par de valores de la función, por ejemplo:

x	$f(x)$
2	$\dfrac{1}{2^2-2}=\dfrac{1}{2}$
3	$\dfrac{1}{3^2-3}=\dfrac{1}{6}$

Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida: $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx$$

Es una integral racional,

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}=\frac{A(x-1)+Bx}{x^2-x}$$

Luego $1 = A(x-1) + Bx$

para $x = 0 \rightarrow 1 = A(0-1) + B \cdot 0 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1$

para $x = 1 \rightarrow 1 = A(1-1) + B \cdot 1 \rightarrow 1 = B \rightarrow B = 1$

Como la integral indefinida es para calcular la integral definida, no usamos la constante de integración,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-Ln\,|x|+Ln\,|x-1|$$

Luego,

$$\int_2^3\frac{1}{x^2-x}dx=\left[-Ln\,|x|+Ln\,|x-1|\right]_2^3=\left(-Ln\,|3|+Ln\,|3-1|\right)-\left(-Ln\,|2|+Ln\,|2-1|\right)=$$

$$=\left(-Ln\,3+Ln\,2\right)-\left(-Ln\,2+Ln\,1\right)=-Ln\,3+Ln\,2+Ln\,2-Ln\,1=2Ln\,2-Ln\,3-0=$$

$$=2Ln\,2-Ln\,3\approx 0´2877$$

Solución: el valor del área pedida es $\left(2Ln\,2-Ln\,3\right)u^2 \approx$ ***$0´2877\ u^2$.***

PROBLEMA B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = a\,A + b\,I$. *(3 puntos)*

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$. *(4 puntos)*

c) El determinante de la matriz $2\,B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinantes es 2. *(3 puntos)*

Solución:

A es una matriz cuadrada / $A^2 + 2A = 3I$. *Comprobemos que existe* A^{-1}

$$A^2 + 2A = 3I \rightarrow A(A+I) = 3I \rightarrow A\left[\frac{1}{3}(A+I)\right] = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(A+I)$$

a) ¿a, b / $A^{-1} = a\,A + b\,I$?.

Partimos de $A^2 + 2A = 3I$.

multiplicamos por la derecha por A^{-1}, $A^2 A^{-1} + 2A A^{-1} = 3 I A^{-1} \rightarrow A(A A^{-1}) + 2 A A^{-1} = 3 I A^{-1}$

$$A I + 2I = 3A^{-1} \rightarrow A + 2I = 3A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

Por tanto, $a = \frac{1}{3}$ *y* $b = \frac{2}{3}$.

b) ¿α, β / $A4 = \alpha A + \beta I$?

Partimos de $A^2 + 2A = 3I \rightarrow A^2 = 3I - 2A$

$A^4 = A^2 . A^2 = (3I - 2A).(3I - 2A) = 9II - 6IA - 6IA + 4A^2 = 9I - 6A - 6A + 4A^2 =$

$= 9I - 12A + 4A^2 = 9I - 12A + 4(3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21.I$

Por tanto, $\boldsymbol{\alpha = -20}$ ***y*** $\boldsymbol{\beta = 21}$.

c) $|2B^{-1}|$, *sabiendo que B es 3x3 y* $|B| = 2$

Calculemos $\left|2B^{-1}\right|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$\left|B^{-1}\right| = \frac{1}{|B|} \quad y \quad |n\,b| = n^3\,|B| \quad (\text{por ser } B\ 3x3)$$

$$\left|2B^{-1}\right| = 2^3\left|B^{-1}\right| = 8\,\frac{1}{|B|} = 8\,\frac{1}{2} = 4$$

Solución: $\boldsymbol{|2B^{-1}| = 4}$

PROBLEMA B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$, se pide obtener <u>**razonadamente**</u>**,** <u>**escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**</u>:

a) La recta s que corta a la recta a r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r *(4 puntos)*

b) La distancia del punto A a la recta r. *(3 puntos)*

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,–1,0)$ y es perpendicular a r. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿recta s? / s corta a r, $A \in s$ y $s \perp r$

s corta a r en el punto P_r, por tanto la recta s pasa por A y P_r

Como $s \perp r \rightarrow \overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r}$, $\left(\overrightarrow{v_r}\ \text{es el vector director de la recta } r\right)$

$A(5, 7, 3)$ y $P_r(3-\lambda, -1+3\lambda, 2\lambda) \rightarrow \overrightarrow{AP_r} = (-2-\lambda, -8+3\lambda, -3+2\lambda)$

$\overrightarrow{v_r} = (-1, 3, 2)$

$\overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r} \rightarrow (-2-\lambda, -8+3\lambda, -3+2\lambda) \cdot (-1, 3, 2) = 0$

$2 + \lambda - 24 + 9\lambda - 6 + 4\lambda = 0 \rightarrow -28 + 14\lambda = 0 \rightarrow 14\lambda = 28 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow$ $P_r(1, 5, 4)$

La recta s que pasa por A y P_r, $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AP_r} = (4,2,-1)$, *por tanto*

$$s: \frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

b) ¿$d(A, r)$?

El cálculo de esta distancia es: $d(A,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$

$A(5,7,3)$

$P_r(3,-1,0)$

$\overrightarrow{AP_r}(-2,-8,-3)$

$\overrightarrow{v_r}(-1,3,2)$

$$\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-16+9) - \vec{j}\,(-4-3) + \vec{k}\,(-6-8) = \vec{i}\,(-7) - \vec{j}\,(-7) + \vec{k}\,(-14) = -7\vec{i} + 7\vec{j} - 14\vec{k} = (-7, 7, -14)$$

$$\left|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{6}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Finalmente, $d(A,r) = \dfrac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{21}\ u.$

c) ¿$d(B, \pi)$? / siendo: $B(1, 1, 1)$ y π un plano $\begin{cases} \text{pasa por } (3, -1, 0) \\ \perp r \end{cases}$

Ecuación del plano π:

Como $\pi \perp r \;\rightarrow\; \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \;\rightarrow\; \pi : -x + 3y + 2z + C = 0$

Como $(3, -1, 0) \in \pi \;\rightarrow\; -3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + C = 0 \;\rightarrow\; -6 + C = 0 \;\rightarrow\; C = 6$

Por tanto, $\pi: -x + 3y + 2z + 6 = 0$

Finalmente, $d(B, \pi) = \dfrac{|-1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{7} \quad \rightarrow \quad d(B, \pi) = \dfrac{5\sqrt{14}}{7}$ *u.*

PROBLEMA B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud *x*, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud 100 – *x*, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

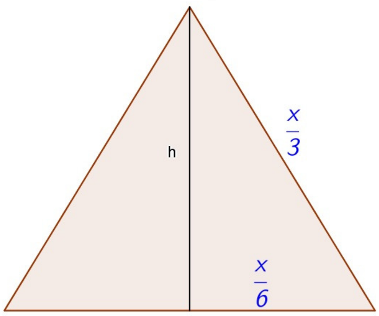
a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$. *(4 puntos)*

b) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor. *(3 puntos)*

c) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido. *(3 puntos)*

Solución:
Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes.
Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero [de lado x / 3]
y con la otra, de longitud 100 – x, se construye un cuadrado [de lado (100 – x) / 4]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + h^2 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{36} + h^2 \;\rightarrow\; h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} \;\rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{36} \;\rightarrow\; h^2 = \frac{3x^2}{36} \;\rightarrow\; h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

(como h es una longitud, h > 0)

Luego, $A_T = \dfrac{\frac{x}{3}\,\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \dfrac{\frac{x^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2 = \frac{(100 - x)^2}{16}$$

Finalmente, la suma de las áreas es $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \dfrac{(100-x)^2}{16} \qquad 0 \le x \le 100$

b) Mínimo de f(x).

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 2x + \frac{1}{16}\cdot 2(100-x)\cdot(-1) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{1}{8}(100-x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{100}{8} + \frac{x}{8} = \frac{4\sqrt{3}\,x - 900 + 9x}{72} =$$

$$= \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 900}{72}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 900}{72} = 0 \;\rightarrow\; \left(4\sqrt{3}+9\right)x - 900 = 0 \;\rightarrow\; \left(4\sqrt{3}+9\right)x = 900$$

$$x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} \cong 56´5035 \quad (\in [0, 100])$$

Como $f´(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.
En x = 56´5035 hay un mínimo local y como f(x) a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función f(x) alcanza su mínimo para $x = \dfrac{900}{4\sqrt{3}+9}\,cm \cong 56{\acute{}}5035\ cm$

c) Máximo de f(x):

Como f(x) está definida en un intervalo cerrado, la función alcanza su máximo en el interior del intervalo o en los extremos. En el interior, como hemos obtenido en el apartado anterior, alcanza el mínimo.

Calculemos el valor de f(x) en los extremos del intervalo (para x = 0 y x= 100)

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 0^2 + \frac{(100-0)^2}{16} = \frac{100^2}{16} = 625$$

$$f(100) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 100^2 + \frac{(100-100)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 100^2 = 481$$

El máximo de f(x) se alcanza para x = 0*, en este caso* ***todo el alambre se usa para construir un cuadrado de 25 cm de lado****.*