Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

2. (*3,25 puntos*) Dada la función

$$f(x)=\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}$$

Calcular:

a) (*0,25 puntos*) Dominio de f.

b) (*0,75 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $(x) = 5$?

c) (*1 punto*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) (*1,25 puntos*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. (*3,5 puntos*) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (*2 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

2. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B=10(2x+1)^2\,y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx$$

3. (*3,5 puntos*) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

c) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y B el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos A y B independientes?

d) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

Llamemos x = Número de lotes A e y = Número de lotes B.

La función de Gasto del restaurante es $G(x,y)=8x+10y$. Se desea minimizar el gasto.

Las restricciones se obtienen del enunciado del problema:

- x e y son cantidades positivas → $x\geq 0 \quad y\geq 0$
- El restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas → $x+4y\geq 24$
- El restaurante quiere tener, al menos, 30 kilos de naranjas → $5x+2y\geq 30$
- El restaurante quiere tener, al menos, 12 kilos de peras → $x+y\geq 12$

Resumimos las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+4y\geq 24 \\ 5x+2y\geq 30 \\ x+y\geq 12 \end{array}\right\}$$

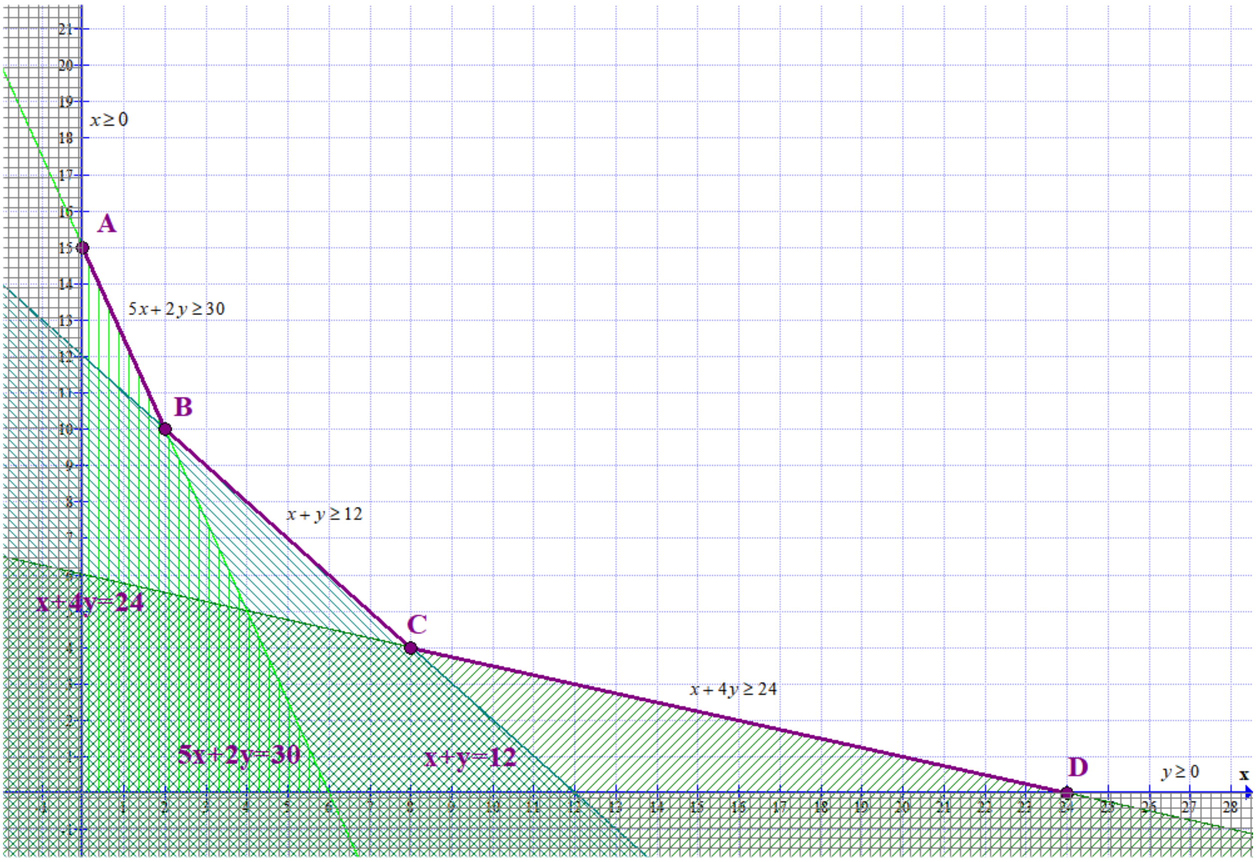
Para obtener la región factible dibujamos las rectas asociadas y vamos tachando la zona que no pertenece a la región factible, quedando en blanco la zona del plano que cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+4y=24 \\ 5x+2y=30 \\ x+y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ y=\dfrac{24-x}{4} \\ y=\dfrac{30-5x}{2} \\ y=12-x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

x	$y=\dfrac{24-x}{4}$
0	6
24	0
8	4

x	$y=\dfrac{30-5x}{2}$
0	15
6	0
2	10

x	$y=12-x$
0	12
12	0
2	10
8	4



Hallamos los puntos de corte entre las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ y=\dfrac{30-5x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{30-5x}{2}=\dfrac{30}{2}=15}$$

El punto de corte es A(0, 15).

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{30-5x}{2} \\ y=12-x \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{30-5x}{2}=12-x \Rightarrow 30-5x=24-2x \Rightarrow 6=3x \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow \boxed{y=12-2=10}$$

El punto de corte es B(2, 10)

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{24-x}{4} \\ y=12-x \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{24-x}{4}=12-x \Rightarrow 24-x=48-4x \Rightarrow 3x=24 \Rightarrow \boxed{x=8} \Rightarrow \boxed{y=12-8=4}$$

El punto de corte es C(8, 4)

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{y=0} \\ y=\dfrac{24-x}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\dfrac{24-x}{4} \Rightarrow 0=24-x \Rightarrow \boxed{x=24}$$

El punto de corte es D(24, 0)

La función gasto del restaurante viene expresada como $G(x,y)=8x+10y$. Valoramos el gasto en la situación planteada en cada vértice de la región factible y localizamos cuando el gasto es mínimo.

A(0, 15) → $G(0,15)=0+150=150$

B(2, 10) → $G(2,10)=16+100=116$

C(8, 4) → $G(8,4)=64+40=104$

D(24, 0) → $G(24,0)=192+0=192$

El gasto es mínimo en el punto C(8, 4). Se deben comprar solo 8 lotes del tipo A y 4 lotes del tipo B, satisfacemos las necesidades y el coste es el más bajo posible: 104 €.

2. (*3,25 puntos*) Dada la función

$$f(x)=\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}$$

Calcular:

a) (*0,25 puntos*) Dominio de f.

b) (*0,75 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple (x) = 5?

c) (*1 punto*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) (*1,25 puntos*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) El dominio de la función son todos los números reales, salvo los que anulan el denominador.

$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$. $\text{Dominio}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) Si, entonces debe cumplirse que:

$$f(x)=5 \Rightarrow \frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=5 \Rightarrow 4x^2+4x+5=10x+5 \Rightarrow 4x^2-6x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 0 \\ 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}} \end{cases}$$

c) Asíntota vertical. $x=a$

Como $\text{Dominio}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, entonces la asíntota vertical es $x=-\frac{1}{2}$

Asíntota horizontal. $y=b$

$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty$. No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}2=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+5-4x^2-2x}{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

La asíntota oblicua es $y = 2x+1$

d) Obtenemos la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(8x+4)(2x+1)-2(4x^2+4x+5)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2+8x+8x+4-8x^2-8x-10}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2+8x-6}{(2x+1)^2}$$

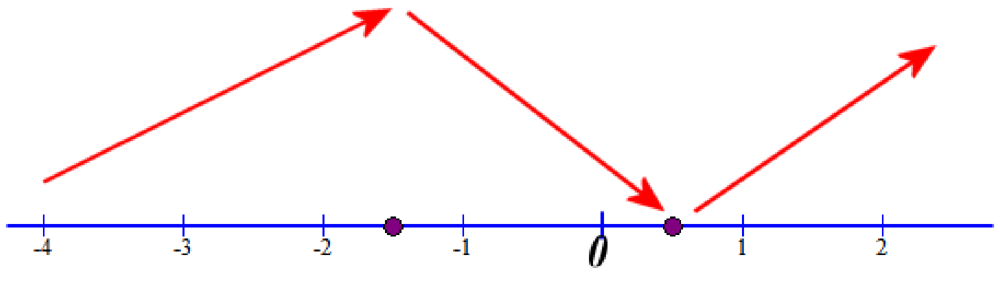
Igualamos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x^2+8x-6}{(2x+1)^2} = 0 \Rightarrow 8x^2+8x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8\pm\sqrt{64+192}}{16} = \begin{cases} x = \frac{-8+16}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ o \\ x = \frac{-8-16}{16} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada antes de –1,5, entre –1,5 y 0,5 y después de 0,5.

- En $(-\infty, -1.5)$ tomamos x = –2 y la derivada vale $f'(-2) = \frac{32-16-6}{(-4+1)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece.
- En $(-1.5, -0.5)$ tomamos x = –1 y la derivada vale $f'(-1) = \frac{8-8-6}{(-2+1)^2} = -6 < 0$. La función decrece.
-
- En $(-0.5, 0.5)$ tomamos x = 0 y la derivada vale $f'(0) = \frac{0+0-6}{(0+1)^2} = -6 < 0$. La función decrece.
- En $(0.5, +\infty)$ tomamos x = 1 y la derivada vale $f'(1) = \frac{8+8-6}{(2+1)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece.



La función crece en $(-\infty, -1.5) \cup (0.5, +\infty)$ y decrece en $(-1.5, -0.5) \cup (-0.5, 0.5)$

3. (*3,5 puntos*) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (*2 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

X = Peso de las manzanas de un agricultor en gramos. X = N(μ, 20)

a)

Si la amplitud del intervalo de confianza $\left(\bar{x}-Error, \bar{x}+Error\right)$ es igual a 8, entonces el error es 8/2 = 4 g.

El nivel de confianza del 93% → 1–∝ = 0,93 → ∝ = 0,07 → $\frac{\alpha}{2}=0,035$ → $1-\frac{\alpha}{2}=0,965$

Buscando en la tabla de la normal el valor 0,965 encontramos $z_{\frac{\alpha}{2}}=1,81$

Con todos estos datos, aplicamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4 = 1,81 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{20 \cdot 1,81}{4} = 9,05 \Rightarrow n = \left(9,05\right)^2 = 81,9025$$

Para que la amplitud sea menor o igual que 8 g, el tamaño de la muestra debe ser igual o superior a 82 manzanas.

b)

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{178+221+196+231+210+168+203+186+196+214+230+224}{12} = \frac{2457}{12} = 204,75$$

El nivel de confianza del 93% → 1–∝ = 0,93 → ∝ = 0,07 → $\frac{\alpha}{2}=0,035$ → $1-\frac{\alpha}{2}=0,965$

Buscando en la tabla de la normal el valor 0,965 encontramos $z_{\frac{\alpha}{2}}=1,81$

Con todos estos datos, aplicamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{20}{\sqrt{12}} \Rightarrow Error = 10,45$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x}-Error, \bar{x}+Error\right) = \left(204.75-10.45, 204.75+10.45\right) = \left(194.3, 215.2\right)$$

Es decir, la media del peso de las manzanas está entre 194,3 g. y 215,2 g. con un nivel de confianza del 93%.

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Llamemos x = número de habitaciones individuales, y = número de habitaciones dobles, z = número de habitaciones familiares.

- El hotel tiene un total de 144 habitaciones → $x+y+z=144$
- El hotel tiene una capacidad total de 312 personas → $x+2y+4z=312$
- El número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares → $y=3(x+z)$

Uniendo las tres condiciones surge el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=144 \\ x+2y+4z=312 \\ y=3(x+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=144 \\ x+2y+4z=312 \\ -3x+y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} x & +2y & +4z & =312 \\ -x & -y & -z & =-144 \\ \hline & y & +3z & =168 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + 3 · Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} -3x & +y & -3z & =0 \\ 3x & +3y & +3z & =432 \\ \hline & 4y & & =432 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=144 \\ y+3z=168 \\ 4y \quad =432 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=144 \\ y+3z=168 \\ \boxed{y=\frac{432}{4}=108} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+108+z=144 \\ 108+3z=168 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=36 \\ 3z=60 \Rightarrow \boxed{z=20} \end{array}\right\} \Rightarrow x+20=36 \Rightarrow \boxed{x=16}$$

La solución es x =16, y = 108 y z = 20. Es decir, 16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 habitaciones familiares.

2. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B=10(2x+1)^2\,y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx$$

a) Buscamos la expresión del beneficio dependiendo de una sola variable.

$$\left.\begin{array}{l}B=10(2x+1)^2\,y\\ x+y=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}B=10(2x+1)^2\,y\\ y=4-x\end{array}\right\}\Rightarrow B(x)=10(2x+1)^2(4-x)\Rightarrow$$

$$B(x)=10\left(4x^2+1+4x\right)(4-x)=10\left(16x^2+4+16x-4x^3-x-4x^2\right)\Rightarrow$$

$$B(x)=10\left(-4x^3+12x^2+15x+4\right)=-40x^3+120x^2+150x+40$$

Queremos hallar el máximo de esta función. Para ello la derivamos e igualamos a cero la derivada.

$$B(x)=-40x^3+120x^2+150x+40\Rightarrow B'(x)=-120x^2+240x+150$$

$$B'(x)=0\Rightarrow -120x^2+240x+150=0\Rightarrow -4x^2+8x+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{-8}=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{-8}=\frac{-8\pm 12}{-8}=\begin{cases}x=\dfrac{-8+12}{-8}=\dfrac{4}{-8}=-\dfrac{1}{2}=-0,5;\ \text{No tiene sentido}\\ x=\dfrac{-8-12}{-8}=\dfrac{-20}{-8}=\dfrac{5}{2}=2,5\end{cases}$$

No tiene sentido una inversión negativa, por eso se rechaza el valor de x = –0,5 miles de euros.

Calculamos el valor de la derivada segunda del beneficio en x = 2,5. Si tiene sentido pues sería una inversión de 2500 €.

$$B'(x)=-120x^2+240x+150\Rightarrow B''(x)=-240x+240$$

$$x=2,5\rightarrow B''(2,5)=-600+240=-360<0;\ \text{Es un máximo}$$

El beneficio es máximo para una inversión de 2500 euros en el fondo M y 1500 en el fondo N. Siendo este beneficio máximo de $B=10(2\cdot 2,5+1)^2\cdot 1,5=540$ €.

b) Primero calculamos la integral indefinida.

$$\int\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 3x+1=t\rightarrow 3dx=dt\\ dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right\}=\int\left(\frac{5}{t}-\frac{4}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int\frac{5}{t}dt-\frac{1}{3}\int\frac{4}{\sqrt{t}}dt=$$

$$=\frac{5}{3}\int\frac{1}{t}dt-\frac{4}{3}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{5}{3}\ln t-\frac{8}{3}\int\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{5}{3}\ln t-\frac{8}{3}\sqrt{t}=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio}\\ t=3x+1\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{5}{3}\ln\left(3x+1\right)-\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}+K$$

Aplicamos este resultado para el cálculo de la integral definida.

$$\int_0^1\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=\left[\frac{5}{3}\ln\left(3x+1\right)-\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{5}{3}\ln\left(3+1\right)-\frac{8}{3}\sqrt{3+1}\right]-\left[\frac{5}{3}\ln\left(0+1\right)-\frac{8}{3}\sqrt{0+1}\right]=$$

$$=\frac{5}{3}\ln\left(4\right)-\frac{16}{3}-0+\frac{8}{3}=\frac{5\ln 4}{3}-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{5\ln 4-8}{3}}$$

3. (*3,5 puntos*) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

c) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y B el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos A y B independientes?

d) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

Completamos la tabla con los totales en fila y columna.

	Administración	Producción	Ventas	
Sabe inglés	12	30	6	48
No sabe inglés	4	11	1	16
	16	41	7	64

a) $P\left(\text{Sepa inglés}\right)=\frac{\text{Número de empleados que saben inglés}}{\text{Número de empleados}}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}=\boxed{0,75}$

b)

$$P(\text{Sea de ventas / Sabe inglés}) = \frac{\text{Número de empleados de ventas que saben inglés}}{\text{Número de empleados que saben inglés}} =$$

$$= \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = \boxed{0{,}125}$$

c)

Para que sean independientes dos sucesos debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Calculemos estas tres probabilidades y veamos si se cumple la igualdad.

$$A \cap B = \text{"El trabajador es de Administración y sabe inglés"}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Nº de trabajadores de Administración que saben inglés}}{\text{Nº de trabajadores}} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

$$P(A) = P(\text{Sea de Administración}) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(\text{Sepa inglés}) = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

¿Es cierto que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = \dfrac{3}{16} \\ P(A)P(B) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Si, son iguales}$$

. **Los sucesos A y B son independientes**.

d) Hay 64 empleados, 16 de administración, 41 de producción y 7 de ventas.

La probabilidad pedida es:

$$P(\text{Los tres elegidos sean del mismo departamento}) =$$
$$= P(\text{Los tres son de administración}) +$$
$$+ P(\text{Los tres son de producción}) +$$
$$+ P(\text{Los tres son de ventas}) =$$
$$= \frac{16}{64} \cdot \frac{15}{63} \cdot \frac{14}{62} + \frac{41}{64} \cdot \frac{40}{63} \cdot \frac{39}{62} + \frac{7}{64} \cdot \frac{6}{63} \cdot \frac{5}{62} = \frac{3360 + 63960 + 210}{249984} = \boxed{0,27}$$