Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.
Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.
Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto ni más de 25000 de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2.50 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

(a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

El consumo medio anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1960 a 2000 se modeliza con la función

$$F(t) = 0{,}025t^3 - At^2 + Bt + 654, \quad 0 \le t \le 40$$

donde *F(t)* es el número de litros y *t* el tiempo desde el año 1960. Se sabe quo en el año 1970 (t = 10) el consumo fue 711.5 litros y en 1990 (t = 30) el consumo fue 526.5 litros.

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectárea. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 tn por hectárea. Se sabe que el número de tn por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95%. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0.5? **(1 punto)**

.Justificar la respuesta

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1
Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz ***X*** que verifique $A.X-B=B.X+A$. Justificar la respuesta. **(3,5 puntos)**

PROBLEMA 2
Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente:

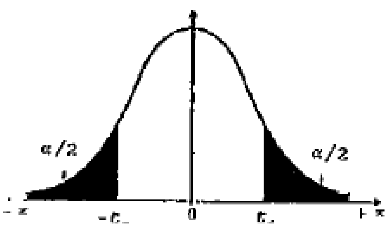
$$I(t)=-3t^2+62t. \quad 0\le t\le 10$$

$$G(t)=t^2-10t+120, \quad 0\le t\le 10$$

donde *I* representa los ingresos y *G,* los gastos. Se pide, razonando las respuestas:
(a) La función que expresa el beneficio de la empresa. **(0.5 puntos)**
(b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende? **(1.5 puntos)**
(c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función *G(t)* y el eje de abscisas en el intervalo [0,5]. **(1 punto)**

PROBLEMA 3
Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.

(a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer americana? **(1 punto)**
(b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(1 punto)**
(c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea? **(1.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto ni más de 25000 de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2.50 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

(a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

A. Es un problema de programación lineal, donde las variables son x = número de botellas de vino blanco e y = número de botellas de vino tinto.

La función que deseamos maximizar es el beneficio obtenida por la venta de toda la producción. $B(x,y)=3x+2,5y$.

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ \text{El número de botellas de vino blanco debe ser inferior al de vino tinto} \rightarrow x<y \\ \text{El máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000} \rightarrow x+y\leq 60000 \\ \text{No pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto} \rightarrow y\leq 40000 \\ \text{No pueden producirse más de 25000 de vino blanco} \rightarrow x\leq 25000 \end{array}\right\}$$

Si expresamos las restricciones en miles de botellas serian:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x<y \\ x+y\leq 60 \\ y\leq 40 \\ x\leq 25 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible, para determinar los vértices de dicha región y posibles soluciones del problema.

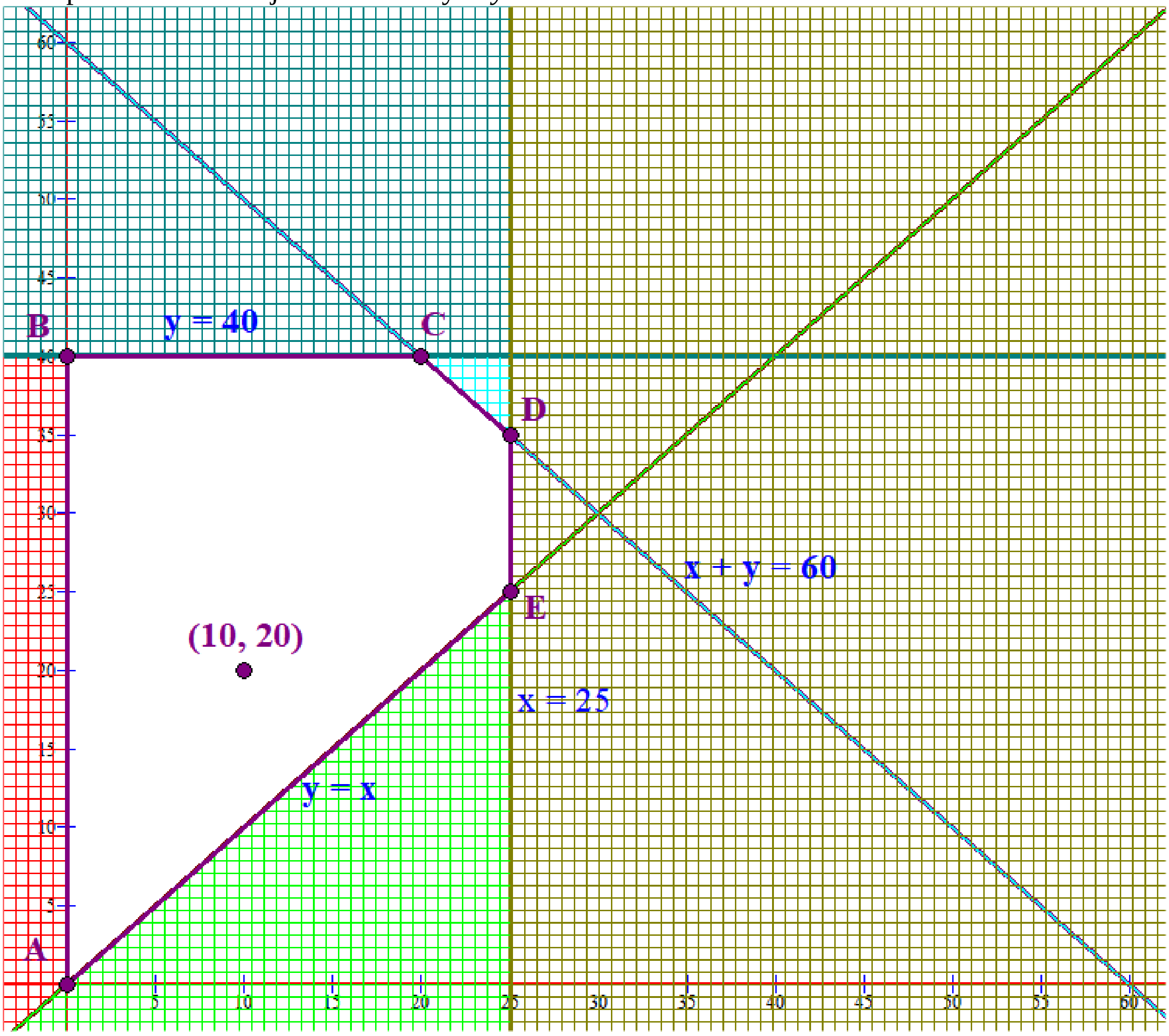
Hacemos una tabla para dibujar cada una de las rectas y determinamos sus puntos de corte.

x	$y=x$
0	0
25	25
30	30
40	40

x	$y=60-x$
0	60
30	30
25	35
20	40

x	$y=40$
0	40
40	40

Lo representamos en ejes donde la x y la y son en miles de botellas.



El punto (10, 20) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 20 \geq 0 \\ 10 < 20 \\ 10+20 \leq 60 \\ 20 \leq 40 \\ 10 \leq 25 \end{array}\right\}$$ Por lo que la región factible es la zona blanca del dibujo.

Las coordenadas de los vértices son:
A(0, 0); B(40, 0); C(20, 40); D(25, 35); E(25, 25)

Valorando los beneficios en cada uno de ellos podremos encontrar el máximo beneficio de todos los puntos de la región factible.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(40, 0) → $B(40,0)=120$

C(20, 40) → $B(20,40)=60+100=160$

D(25, 35) → $B(25,35)=75+87,5=162,5$

E(25, 25) → $B(25,25)=75+62,5=137,5$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice B(25, 35). Con la venta de 25000 botellas de vino blanco y 35000 de vino tinto.

B. El beneficio máximo es $B(25,35)=75+87,5=162,5$.

Lo que significa un beneficio de 162500 €, dado que 25 y 35 se refiere a 25000 y 35000 botellas de vino blanco y tinto, respectivamente.

PROBLEMA 2

El consumo medio anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1960 a 2000 se modeliza con la función

$$F(t)=0,025t^3-At^2+Bt+654, \quad 0\le t\le 40$$

donde *F(t)* es el número de litros y *t* el tiempo desde el año 1960. Se sabe quo en el año 1970 *(t* = 10) el consumo fue 711.5 litros y en 1990 *(t* = 30) el consumo fue 526.5 litros.

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo. **(1 punto)**

(a) Los datos proporcionados son:

Para t = 10 la función vale F(10)=711.5 →

$$F(10)=711.5 \Rightarrow 0,025\cdot 1000-A\cdot 100+B\cdot 10+654=711.5 \Rightarrow 25-100A+10B+654=711.5$$

$$-100A+10B=32.5$$

Para t = 30 la función vale F(30)=526.5 →

$$F(30)=526.5 \Rightarrow 0,025\cdot 27000-A\cdot 900+B\cdot 30+654=526.5 \Rightarrow 675-900A+30B+654=526.5$$

$$-900A+30B=-802.5$$

Resolvamos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}-900A+30B=-802.5\\-100A+10B=32.5\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{\text{- 9 · 2}^{\text{a}}\text{ ecuacion + 1}^{\text{a}}\text{ ecuación}}\\ 900A & -90B & = & -292.5\\ -900A & +30B & = & -802.5\\ \hline & -60B & = & -1095\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -60B=-1095 \Rightarrow B=\frac{1095}{60}=18.25$$

$$\Rightarrow -100A+182.5=32.5 \Rightarrow -100A=-150 \Rightarrow A=\frac{150}{100}=1.5$$

Los valores buscados son A = 1,5 y B = 18,25

(b) Determinemos los puntos críticos de esta función.

$$F(t)=0,025t^3-1,5t^2+18,25t+654 \Rightarrow F\,'(t)=0,075t^2-3t+18,25$$

$$F\,'(t)=0 \Rightarrow 0,075t^2-3t+18,25=0 \Rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{9-5,475}}{0,15}=\frac{3\pm 1.877}{0,15}=\begin{cases}=\dfrac{3+1,877}{0,15}=32,5\\[2mm] =\dfrac{3-1,877}{0,15}=7,5\end{cases}$$

La derivada segunda es:

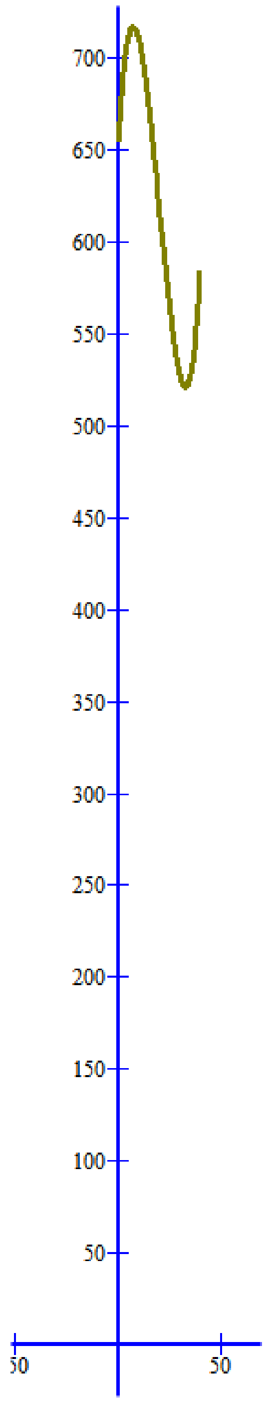
$$F\,'(t)=0,075t^2-3t+18,25 \Rightarrow F\,''(t)=0,15t-3$$

En t = 32,5 $F\,''(32,5)=4,875-3>0$ la función presenta un mínimo en (32.5, 521)

En t = 7,5 $F\,''(7,5)=1,125-3<0$ la función presenta un máximo en (7.5, 713)

Hacemos una tabla de valores de la función

t	$F(t)=0,025t^3-1,5t^2+18,25t+654$
0	654
7,5	713,04
32,5	520,95
40	584



PROBLEMA 3
Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectárea. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 tn por hectárea. Se sabe que el número de tn por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.
(a) Calcular el intervalo de confianza al 95%. **(2.5 puntos)**
(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0.5? **(1 punto)**
Justificar la respuesta

(a) X = Tn de tomate producido por hectárea. X = N(μ, 2)
El tamaño de la muestra es n = 37 y la media obtenida en la muestra es $\overline{x} = 78$.

(a) Si el nivel de confianza es del 95% hallamos el error asociado.

$$1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Busco en la tabla}\\ \text{de la N(0,1)}\end{matrix}\right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

El error es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{37}} = 0,644...$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(78 - 0.644, 78 + 0,644\right) = \left(77.356, 78.644\right)$$

(b)
La longitud del intervalo es el doble del Error, por lo que el error debe ser 0,25.

Si el nivel de confianza es el mismo $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Con la fórmula es Error = $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{3,92}{\sqrt{n}}$

$$\frac{3,92}{\sqrt{n}} = 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{3,92}{0,25} \Rightarrow n = \left(\frac{3,92}{0,25}\right)^2 = 245,86$$

El tamaño de la muestra debe ser un mínimo de 246 personas.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1
Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz ***X*** que verifique $A.X-B=B.X+A$. Justificar la respuesta. **(3,5 puntos)**

$$A.X-B=B.X+A$$
$$AX-BX=A+B$$
$$(A-B)X=A+B$$

Veamos si la matriz *A–B* tiene inversa y podemos hallar la matriz X utilizando la inversa.

$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $|A-B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0$

Existe su inversa y la calculo con la fórmula:

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj(A-B)^t}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-3}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{-3}$$

$$(A-B)X=A+B\Rightarrow (A-B)^{-1}(A-B)X=(A-B)^{-1}(A+B)$$

$$X=(A-B)^{-1}(A+B)$$

$$X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -11/3 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Si la matriz $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la ecuación $A.X-B=B.X+A$ queda como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c-1 & 2b+d-2 \\ -a+c-2 & -b+d-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c+2 & b+2d+1 \\ 2a+c-1 & 2b+d+1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a+c-1=a+2c+2 \\ 2b+d-2=b+2d+1 \\ -a+c-2=2a+c-1 \\ -b+d-1=2b+d+1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a-c=3 \\ b-d=3 \\ -3a=1 \\ -3b=2 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a-c=3 \\ b-d=3 \\ \boxed{a=-\frac{1}{3}} \\ \boxed{b=-\frac{2}{3}} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{3}-c=3 \\ -\frac{2}{3}-d=3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{3}-3=c \\ -\frac{2}{3}-3=d \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} c=-\frac{10}{3} \\ d=-\frac{11}{3} \end{array}\right\}$$

$$X=\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -11/3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2
Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente:

$$I(t) = -3t^2 + 62t. \quad 0 \le t \le 10$$

$$G(t) = t^2 - 10t + 120, \quad 0 \le t \le 10$$

donde *I* representa los ingresos y *G*, los gastos. Se pide, razonando las respuestas:
(a) La función que expresa el beneficio de la empresa. **(0.5 puntos)**
(b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende? **(1.5 puntos)**
(c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función *G(t)* y el eje de abscisas en el intervalo [0,5]. **(1 punto)**

(a) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(t) = I(t) - G(t) = \left(-3t^2 + 62t\right) - \left(t^2 - 10t + 120\right) = -3t^2 + 62t - t^2 + 10t - 120$$

$$B(t) = -4t^2 + 72t - 120. \quad 0 \le t \le 10$$

(b) Determinamos su derivada y la igualamos a cero.

$$B(t) = -4t^2 + 72t - 120 \Rightarrow B(t) = -8t + 72$$

$$B(t) = 0 \Rightarrow -8t + 72 = 0 \Rightarrow -8t = -72 \Rightarrow t = \frac{72}{8} = 9$$

t = 9 es un posible máximo.

$B´(t) = -8t + 72 \Rightarrow B´´(t) = -8$, por lo que $B´´(9) = -8 < 0$.

El beneficio presenta un máximo en t = 9. Su beneficio es

$$B(9) = -4 \cdot 81 + 72 \cdot 9 - 120 = -324 + 648 - 120 = 204$$

Al cabo de 9 años se obtiene un beneficio máximo de 204000 €

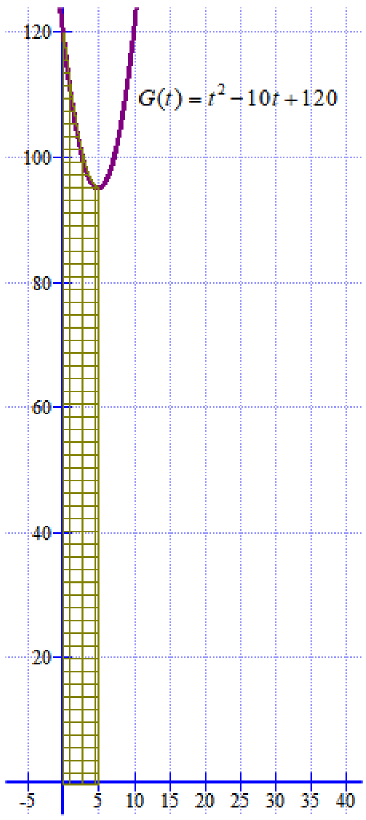
(c) La función $G(t) = t^2 - 10t + 120$ es una parábola. La dibujamos, y para ello hallo varios puntos de la misma, incluyendo los posibles puntos de corte con los ejes.

$$G(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 480}}{2} = \textit{No existe}$$

No hay puntos de corte con el eje OX.

t	$G(t) = t^2 - 10t + 120$
0	120
2	104
3	99
5	95



$$\acute{A}rea = \int_0^5 t^2 - 10t + 120dt = \left[\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 120t \right]_0^5 =$$

$$= \left[\frac{5^3}{3} - 125 + 600 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0 + 0 \right] = \frac{1550}{3} = \boxed{516,67\, u^2}$$

PROBLEMA 3
Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.
(a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer americana? **(1 punto)**
(b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(1 punto)**
(c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea? **(1.5 puntos)**

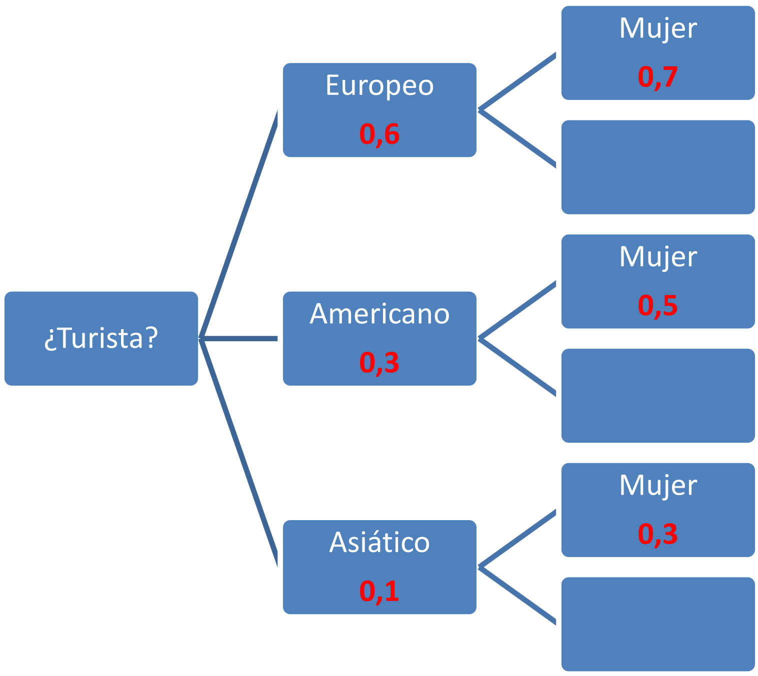
(a) El 50% del 30 % de los turistas son mujeres americanas. La probabilidad de seleccionar una mujer americana es 0,5 · 0,3 = 0,15.

(b) Mujeres son: el 50% del 30% (mujeres americanas) más el 70% del 60% (mujeres europeas) más el 30% del 10% (mujeres asiáticas).
La probabilidad pedida es 0,5 · 0,3 + 0, 7 ·0, 6 + 0,3 ·0,1 =0,15 + 0,42 + 0,03 = 0,6

(c) Siendo 100 los turistas habrían 60 que serían mujeres y de ellas 42 serían europeas (0,7 · 0,6).
La probabilidad pedida es 42/60 = 0,7

OTRA FORMA DE HACERLO

Construyamos el diagrama de árbol.



(a)

$$P(\text{Mujer americana}) = P(Americano) \cdot P(Mujer / Americano) =$$
$$= 0,3 \cdot 0,5 = \boxed{0,15}$$

(b)

$$P(Mujer) = P(\text{Mujer americana}) + P(\text{Mujer europea}) + P(\text{Mujer asiática}) =$$
$$= P(\text{Americano}) \cdot P(\text{Mujer / Americano}) + P(\text{Europeo}) \cdot P(\text{Mujer / Europeo}) +$$
$$+ P(\text{Asiático}) \cdot P(\text{Mujer / Asiático}) =$$
$$= 0,3 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,15 + 0,42 + 0,03 = \boxed{0,6}$$

(c)

$$P(Europea / Mujer) = \frac{P(\text{Mujer y Europea})}{P(Mujer)} = \frac{\cancel{0,6} \cdot 0,7}{\cancel{0,6}} = \boxed{0,7}$$