UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)** **Curso Académico:** 2017 - 2018 **ASIGNATURA:** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS

INSTRUCCIONES

a) Responde solo a una de las dos opciones (OPCIÓN A / OPCIÓN B).

b) No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte A1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x)=\frac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y=\frac{x}{4}+2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a.

b) Tomando en $a= 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

Pregunta A1.2. (0.5+1+0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	*2*	*4*	*2*
Actrices	*1*	*4*	*3*
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	*17*	*40*	*27*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.

b) Determina dichos honorarios.

c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?

b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.

(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte A2: Responde a <u>dos de las tres preguntas</u> que se plantean a continuación. Su valor total es de <u>4 puntos</u>.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos) Consideramos un rectángulo cuyos lados miden x e y.

a) Encontrar el rectángulo de perímetro mínimo, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $xy^2 = 4$.

b) Encontrar el rectángulo de área máxima, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $x + 3y^2 = 1$.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a = 1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = 3 \cdot A^t + A - 3 \cdot I_2$

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Pregunta A2.3. (1 + 1 puntos) De los habitantes de Logroño se sabe que tres cuartas partes han visitado en alguna ocasión San Sebastián y tres quintas partes han estado alguna vez en Zaragoza. Además, un cuarenta por ciento de los logroñeses reconoce haber visitado ambas ciudades.

a) Si mi amigo Juan, que es de Logroño, me ha dicho que el otro día estuvo comiendo en San Sebastián, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado también en Zaragoza en alguna ocasión?

b) Luis, otro amigo mío de Logroño, es de poco viajar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguna de las dos ciudades?

OPCIÓN B

Parte B1: Responde a <u>cada una de las tres preguntas</u> que se plantean a continuación. Su valor total es de <u>6 puntos</u>.

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x)=\dfrac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y=\dfrac{x}{4}+2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a.
b) Tomando en $a= 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

Pregunta B1.2. (0.5+1+0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	3t-2	2t-1
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
b) Determina dichos honorarios.
c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de inté1pretes infantiles de cada película?

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.
a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte B2: Responde a <u>dos de las tres preguntas</u> que se plantean a continuación. Su valor total es de <u>4 puntos</u>.

Pregunta B2.1. (1+1 puntos) Sean a y b dos parámetros reales. Consideramos la función

$$f(x)=\begin{cases} -ax^3+6bx^2-3x, & x<-1 \\ ax+b, & -1\le x\le 1 \\ -ax^3-4bx^2-3x, & x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de a y b es continua la función dada?

b) Tomando $a = 1$ y $b = -1$, calcular la integral definida $\int_0^3 f(x)dx$.

Pregunta B2.2. (l+0.5+0.5 puntos) Sean

$$\begin{cases} 3(y-2)\le x\le 2y \\ 2(2-y)\le x\le 6-y \end{cases},$$

las restricciones asociadas a un cierto problema de optimización.

a) Dibujar la región factible asociada a las restricciones dadas, indicando claramente los vértices de la misma.

b) ¿Cuál es máximo de la función $f(x,y)=3x+y$ en la región factible?

c) Si a es un cierto valor real positivo y sabemos que el máximo de la función $g(x,y)=ax+3y$ en la región factible es quince, ¿cuál es el valor de a?

Pregunta B2.3. (1+1 puntos) En la Escuela Oficial de Idiomas de mi ciudad, hay tres aulas de primer curso de inglés. La distribución de chicos y chicas en cada aula es como se muestra en la tabla adjunta.

	Aula 1	**Aula 2**	**Aula 3**
Chicos	**21**	**16**	**16**
Chicas	**18**	**16**	**24**

a) Determina la probabilidad de que al elegir un estudiante de primer curso sea chica.

b) Si elegimos una chica de primer curso al azar, ¿a qué aula es más probable que pertenezca?

Tabla abreviada de la normal tipificada.

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x)=\dfrac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y=\dfrac{x}{4}+2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a.
b) Tomando en $a = 2$, determinar las asíntotas de *f(x)*.

a) Si la recta tangente es paralela a la recta $y=\dfrac{x}{4}+2018$, entonces tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en ese punto $f\,'(0)$ y el valor de la pendiente de la recta $y=\dfrac{x}{4}+2018$ es $\dfrac{1}{4}$.

$$f(x)=\frac{x(x+a)}{x^2-4}=\frac{x^2+ax}{x^2-4}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{(2x+a)(x^2-4)-2x(x^2+ax)}{(x^2-4)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0)=\dfrac{(0+a)(0^2-4)-2\cdot 0\cdot(0^2+a\cdot 0)}{(0^2-4)^2}=\dfrac{-4a}{16}=\dfrac{-a}{4} \\ m=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-a}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow -a=1\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

b) Si a = 2 la función es $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{x^2-4}=\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$, se excluyen estos dos valores ya que anulan el denominador.

Asíntota vertical. $x=a$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2)}{x^2-4}=\frac{8}{0}=\infty$$

x = 2 es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to -2}\frac{x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{(x-2)}=\frac{-2}{-4}=0{,}5$$

x = –2 no es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

y = 1 es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$**.** No existe, pues hay una asíntota horizontal.

Pregunta A1.2. (0.5+ 1 +0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	*t*	*3t-2*	*2t-1*
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
b) Determina dichos honorarios.
c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

a) Si llamamos "x" al sueldo por día de un actor, "y" al sueldo por día de una actriz y "z" al sueldo por día de un intérprete infantil, la tabla anterior se queda:

	Película uno	Película dos	Película tres
Sueldo de los actores	2x	4x	2x
Sueldo de las actrices	y	4y	3y
Sueldo de los intérpretes infantiles	*tz*	*(3t-2)z*	*(2t-1)z*
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

Y las ecuaciones formarían un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+tz=17 \\ 4x+4y+(3t-2)z=40 \\ 2x+3y+(2t-1)z=27 \end{array}\right\}$$

b) Resolvamos el sistema anterior utilizando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+tz=17 \\ 4x+4y+(3t-2)z=40 \\ 2x+3y+(2t-1)z=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2\cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ 4x & +4y & +(3t-2)z & =40 \\ -4x & -2y & -2tz & =-34 \\ \hline & 2y & +(t-2)z & =6 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ 2x & +3y & +(2t-1)z & =27 \\ -2x & -y & -tz & =-17 \\ \hline & 2y & +(t-1)z & =10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+tz=17 \\ 2y+(t-2)z=6 \\ 2y+(t-1)z=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{lll} 2y & +(t-1)z & =10 \\ -2y & -(t-2)z & =-6 \\ \hline & z & =4 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+tz=17 \\ 2y+(t-2)z=6 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+4t=17 \\ 2y+4(t-2)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=17-4t \\ 2y=6-4t+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=17-4t \\ 2y=14-4t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=17-4t \\ \boxed{y=7-2t} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+7-2t=17-4t \Rightarrow 2x=10-2t \Rightarrow \boxed{x=5-t}$$

La solución es $x=5-t; \quad y=7-2t; \quad z=4$

c) Como $x=y$, la solución anteriormente obtenida quedaría:

$$x=y \Rightarrow 5-t=7-2t \Rightarrow t=2 \Rightarrow \begin{cases} x=5-2=3 \\ y=7-4=3 \end{cases}$$

Los sueldos se fijarían en 3000 € por día para actores y actrices y de 4000 € por día para cada interprete infantil.

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.
a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

a) X = Producción diaria de pares de zapatos. X = N(**μ**,200).

La distribución de las medias es $\overline{X_{36}} = N\left(1200, \frac{200}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \overline{X_{36}} = N\left(1200, \quad \frac{100}{3}\right)$

$$P\left(\overline{X_{36}} > 1255\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{36}}-1200}{33,33} > \frac{1255-1200}{33,33}\right) =$$

$$= P(Z>1,65) = 1-P(Z<1,65) = 1-0,9505 = \boxed{0,0495}$$

a) n = 100. $x=1180$
Si el nivel de confianza es 85% calculemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$1-\alpha=0,85 \rightarrow \alpha=0,15 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,075 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,925 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,44$$

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,44 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} = 28,8$$

El intervalo de confianza es:

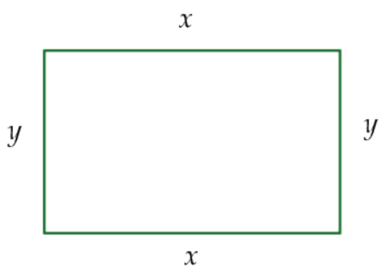
$$\left(\overline{x}-Error, \overline{x}+Error\right) = (1180-28,8, 1180+28,8) = (1151,2, 1208,8)$$

Con un nivel de confianza del 85% la producción media diaria de pares de zapatos estaría entre 1151,2 y 1208,8 pares.

Parte A2:

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos) Consideramos un rectángulo cuyos lados miden *x* e *y*.
a) Encontrar el rectángulo de perímetro mínimo, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $xy^2 = 4$.
b) Encontrar el rectángulo de área máxima, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $x + 3y^2 = 1$.

a) Tenemos que minimizar el perímetro del rectángulo: $P(x, y) = 2x + 2y$.



Como además se cumple $xy^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{y^2}$, que sustituyendo en la función a minimizar solo queda dependiente de una variable (y).

$$P(y) = 2\frac{4}{y^2} + 2y = \frac{8}{y^2} + 2y$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de su mínimo.

$$P(y) = \frac{8}{y^2} + 2y \Rightarrow P'(y) = \frac{8(-2y)}{y^4} + 2 = \frac{-16}{y^3} + 2 = \frac{-16 + 2y^3}{y^3}$$

$$P'(y) = 0 \Rightarrow \frac{-16 + 2y^3}{y^3} = 0 \Rightarrow -16 + 2y^3 = 0 \Rightarrow y^3 = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow y = 2$$

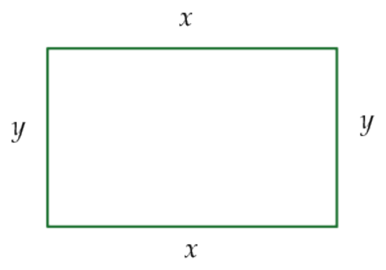
Calculamos la derivada segunda y la valoramos para y = 2.

$$P'(y) = \frac{-16 + 2y^3}{y^3} \Rightarrow P''(y) = \frac{6\cancel{y^2} \cdot y^3 - 3\cancel{y^2} \cdot (-16 + 2y^3)}{y^{\cancel{6}4}} = \frac{6y^3 - 3(-16 + 2y^3)}{y^4}$$

$$P''(2) = \frac{6 \cdot 2^3 - 3(-16 + 2 \cdot 2^3)}{2^4} = \frac{48}{16} > 0$$

En y = 2 hay un mínimo. Los lados deben medir $y = 2$; $x = \frac{4}{2^2} = 1$

a) Tenemos que maximizar el área del rectángulo: $A(x, y) = xy$.



Como además se cumple $x + 3y^2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 3y^2$, que sustituyendo en la función a minimizar solo queda dependiente de una variable (y).

$$A(y)=\left(1-3y^2\right)y=y-3y^3$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de su máximo.

$$A(y)=y-3y^3 \Rightarrow A'(y)=1-9y^2$$

$$A'(y)=0 \Rightarrow 1-9y^2=0 \Rightarrow y^2=\frac{1}{9} \Rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

Calculamos la derivada segunda y la valoramos para y = 2.

$$A'(y)=1-9y^2 \Rightarrow A''(y)=-18y$$

$$A''\left(\frac{1}{3}\right)=-18\frac{1}{3}=-6<0$$

El área es máxima para y = 1/3. El lado x lo obtenemos sustituyendo $x=1-3\frac{1}{9}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Las dimensiones del rectángulo de área máxima sometido a la relación entre los lados $x+3y^2=1$ son 1/3 y 2/3.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando a = l, determinar una matriz X tal que $A\cdot X=3\cdot A^t+A-3\cdot I_2$

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

a) Para que exista la matriz inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{vmatrix}=-3a-2+2(a+1)(a+1)=-3a-2+2\left(a^2+2a+1\right)$$

$$|A|=-3a-2+2a^2+4a+2=2a^2+a$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2+a=0 \Rightarrow a(2a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 2a+1=0 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Existe la matriz inversa para cualquier valor de a distinto de 0 y de $-\frac{1}{2}$.

b) Si a = 1 la matriz A tiene inversa, la calculamos para poder despejar en la ecuación matricial del ejercicio.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad |A|=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-5+8=3$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}{3}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación:

$$A\cdot X=3\cdot A^t+A-3\cdot I_2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=3\cdot A^{-1}\cdot A^t+A^{-1}\cdot A-3\cdot A^{-1}\cdot I_2$$

$$X=3\cdot A^{-1}\cdot A^t+I_2-3\cdot A^{-1}$$

$$X = 3\begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5-16 & 2+4 \\ 10+20 & -4-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -21 & 6 \\ 30 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ 28 & -13 \end{pmatrix}}$$

Pregunta A2.3. (1+1 puntos) De los habitantes de Logroño se sabe que tres cuartas partes han visitado en alguna ocasión San Sebastián y tres quintas partes han estado alguna vez en Zaragoza. Además, un cuarenta por ciento de los logroñeses reconoce haber visitado ambas ciudades.

a) Si mi amigo Juan, que es de Logroño, me ha dicho que el otro día estuvo comiendo en San Sebastián, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado también en Zaragoza en alguna ocasión?
b) Luis, otro amigo mío de Logroño, es de poco viajar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguna de las dos ciudades?

Construyamos una tabla de contingencia que nos ayude a aclarar la situación planteada, con las mezclas posibles.
El 75 % han visitado San Sebastián, el 60% han visitado Zaragoza y el 40% han visitado las dos ciudades.

	Han visitado San Sebastián	No han visitado San Sebastián	
Han visitado Zaragoza	**40**		**60**
No han visitado Zaragoza			
	75		**100**

Completamos la tabla.

	Han visitado San Sebastián	No han visitado San Sebastián	
Han visitado Zaragoza	**40**	20	**60**
No han visitado Zaragoza	35	5	40
	75	25	**100**

Respondemos a las preguntas.

a) $P\left(\text{Haya visitado Zaragoza / Ha visitado San Sebastián}\right) = \dfrac{40}{75} = \boxed{0,533}$

b) $P\left(\text{No haya visitado ninguna de las dos ciudades}\right) = \dfrac{5}{100} = 0,05$

OPCIÓN B

Parte B1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x)=\frac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y=\frac{x}{4}+2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a.

b) Tomando en $a= 2$, determinar las asíntotas de *f(x)*.

Igual que A1.1

Pregunta B1.2. (0.5+ 1 +0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	3t-2	2t-1
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
b) Determina dichos honorarios.
c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de inté1pretes infantiles de cada película?

Igual que A1.2

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.
a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Igual que A1.3

Parte B2:

Pregunta B2.1. (1+1 puntos) Sean a y b dos parámetros reales. Consideramos la función

$$f(x)=\begin{cases}-ax^3+6bx^2-3x, & x<-1\\ ax+b, & -1\le x\le 1\\ -ax^3-4bx^2-3x, & x>1\end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de a y b es continua la función dada?

b) Tomando a= 1 y b = –1, calcular la integral definida $\int_0^3 f(x)dx$.

a) Para que sea continua la función debe de serlo en x = –1 y en x = 1.
En x = –1 debe cumplirse:
- Existe $f(-1)=-a+b$
- Existe $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} -ax^3+6bx^2-3x=a+6b+3$
- Existe $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} ax+b=-a+b$
- Los tres valores deben ser iguales → $a+6b+3=-a+b \Rightarrow 2a=-5b-3$

Para que sea continua en x = –1 debe cumplirse $2a=-5b-3$

En x = 1 debe cumplirse:
- Existe $f(1)=a+b$
- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax+b=a+b$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} -ax^3-4bx^2-3x=-a-4b-3$
- Los tres valores deben ser iguales → $-a-4b-3=a+b \Rightarrow 2a=-5b-3$

Para que sea continua en x = 1 debe cumplirse $2a=-5b-3$

Para que sea continua la función debe cumplirse $2a=-5b-3$

b) Si a = 1 y b = –1 la función es continua, pues $2\cdot 1=-5(-1)-3$, entonces la función es:

$$f(x)=\begin{cases}-x^3-6x^2-3x, & x<-1\\ x-1, & -1\le x\le 1\\ -x^3+4x^2-3x, & x>1\end{cases}$$

La integral pedida se divide en 3 integrales definidas:

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 x-1dx+\int_1^3 -x^3+4x^2-3xdx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+4\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_1^3=$$

$$=\left[\frac{1^2}{2}-1\right]-\left[\frac{0^2}{2}-0\right]+\left[-\frac{3^4}{4}+4\frac{3^3}{3}-3\frac{3^2}{2}\right]-\left[-\frac{1^4}{4}+4\frac{1^3}{3}-3\frac{1^2}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-1-\frac{81}{4}+36-\frac{27}{2}+\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{23}{2}-\frac{80}{4}+35=-\frac{23}{2}+15=\frac{7}{2}=\boxed{3,5}$$

Pregunta B2.2. (l+0.5+0.5 puntos) Sean

$$\begin{cases} 3(y-2) \leq x \leq 2y \\ 2(2-y) \leq x \leq 6-y \end{cases},$$

las restricciones asociadas a un cierto problema de optimización.

a) Dibujar la región factible asociada a las restricciones dadas, indicando claramente los vértices de la misma.

b) ¿Cuál es máximo de la función $f(x,y)=3x+y$ en la región factible?

c) Si a es un cierto valor real positivo y sabemos que el máximo de la función $g(x,y)=ax+3y$ en la región factible es quince, ¿cuál es el valor de a?

a) Las restricciones las podemos separar en cuatro:

$$\begin{cases} 3(y-2) \leq x \\ x \leq 2y \\ 2(2-y) \leq x \\ x \leq 6-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-6 \leq x \\ x \leq 2y \\ 4-2y \leq x \\ x \leq 6-y \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas:

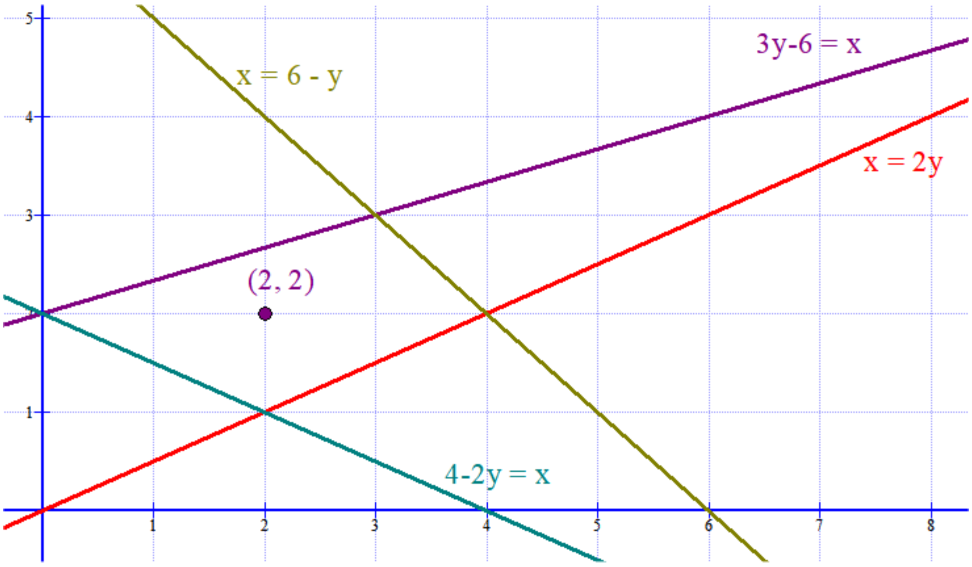
$$\begin{cases} 3y-6 = x \\ x = 2y \\ 4-2y = x \\ x = 6-y \end{cases} \Rightarrow$$

x	$y=\frac{x+6}{3}$
0	2
–6	0
3	3

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
2	1

x	$y=\frac{4-x}{2}$
0	2
4	0
2	1

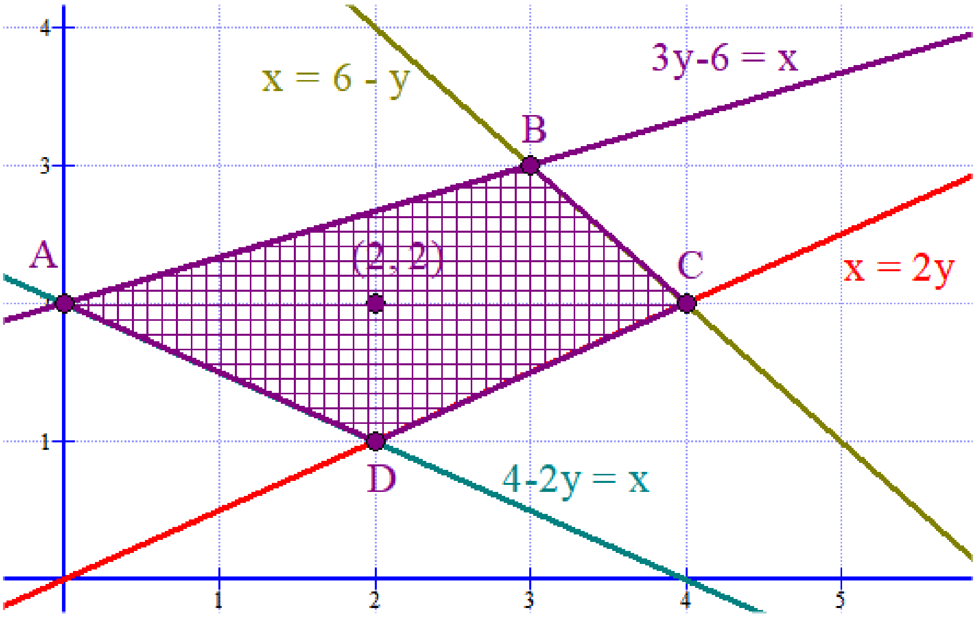
x	$y=6-x$
0	6
6	0
3	3



Compruebo que el punto (2, 2) cumple todas las restricciones.

$$\begin{cases} 6-6 \leq 2 \\ 2 \leq 4 \\ 4-4 \leq 2 \\ 2 \leq 6-2 \end{cases}$$

La región factible es la zona rayada:



Las coordenadas de los vértices las obtenemos resolviendo los sistemas siguientes:

El punto A se obtiene

$$\left.\begin{matrix} 4-2y=x \\ 3y-6=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4-2y=3y-6 \Rightarrow 10=5y \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=4-4=0$$

$A(2,0)$

El punto B se obtiene

$$\left.\begin{matrix} 6-y=x \\ 3y-6=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6-y=3y-6 \Rightarrow 12=4y \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=6-3=3$$

B(3,3)

El punto C se obtiene

$$\left.\begin{matrix} 6-y=x \\ 2y=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6-y=2y \Rightarrow 6=3y \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=6-2=4$$

C(4,2)

El punto D se obtiene

$$\left.\begin{matrix} 4-2y=x \\ 2y=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4-2y=2y \Rightarrow 4=4y \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=4-2=2$$

D(2,1)

b) Valoremos la función $g(x,y)=ax+3y$ en cada vértice de la región factible.

A(2,0) → $g(2,0)=2a$

B(3,3)→ $g(3,3)=3a+9$

C(4,2) → $g(4,2)=4a+6$

D(2,1) → $g(2,1)=2a+3$

Si a es un valor positivo, el valor máximo de la función se alcanza en el punto B o en C, ya que 2a y 2a +3 es más pequeño que 3a + 9 y 4a + 6.

Si en el punto B se alcanza el valor máximo (15) tendríamos que 3a + 9 = 15 → a = 2. Entonces los valores serian:

A(2,0) → $g(2,0) = 2a = 4$

B(3,3)→ $g(3,3) = 3a + 9 = 6 + 9 = 15$

C(4,2) → $g(4,2) = 4a + 6 = 8 + 6 = 14$

D(2,1) → $g(2,1) = 2a + 3 = 4 + 3 = 7$

Se cumpliría lo pedido.

Si en el punto C se alcanza el valor máximo (15) tendríamos que 4a + 6 = 15 → a = 2,25. Entonces los valores serian:

A(2,0) → $g(2,0) = 2a = 4,5$

B(3,3)→ $g(3,3) = 3a + 9 = 6,75 + 9 = 15,75$

C(4,2) → $g(4,2) = 4a + 6 = 9 + 6 = 15$

D(2,1) → $g(2,1) = 2a + 3 = 4,5 + 3 = 7,5$

El punto B alcanza un valor más alto que el C. No se cumpliría lo pedido.

El máximo está en B. El valor de a es 2.

Pregunta B2.3. (1+1 puntos) En la Escuela Oficial de Idiomas de mi ciudad, hay tres aulas de primer curso de inglés. La distribución de chicos y chicas en cada aula es como se muestra en la tabla adjunta.

	Aula 1	Aula 2	Aula 3
Chicos	21	16	16
Chicas	18	16	24

a) Determina la probabilidad de que al elegir un estudiante de primer curso sea chica.
b) Si elegimos una chica de primer curso al azar, ¿a qué aula es más probable que pertenezca?

Completemos la tabla de datos con las sumas parciales o globales.

	Aula 1	Aula 2	Aula 3	
Chicos	21	16	16	53
Chicas	18	16	24	58
	39	32	40	111

a) $P\left(\text{Elegir chica}\right) = \frac{58}{111} = \boxed{0,522}$

b) $P\left(\text{Sea del aula 1 / Es chica}\right) = \frac{18}{58} = 0,31$

$P\left(\text{Sea del aula 2 / Es chica}\right) = \frac{16}{58} = 0,275$

$$P(\text{Sea del aula 3 / Es chica}) = \frac{24}{58} = 0,413$$

Es más probable que sea del aula 3

OTRA FORMA DE HACERLO

Hay 58 chicas en primer curso, de ellas 18 en aula 1, 16 en aula 2 y 24 en aula 3. Es más probable que sea del aula 3, ya que ese aula tiene más chicas.