UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2017–2018**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$
a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.
b) Calcúlese la matriz X tal que A · X = B.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50,\ 2x + y \leq 80,\ \ x \geq 0,\ \ \ y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Obténgase el valor máximo de la función *f(x, y) = 5x + 4y* en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si *f(x)* es continua en *x = 2*.
b) Calcúlese la función derivada de *f(x)* para *x < 2*.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:
a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica σ = 0’5 gramos.
a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0’25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12’25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{c} x+ay+z=1 \\ ax+y+(a-1)z=a \\ x+y+z=a+1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para a = 3.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=2x^3-5x^2+3x.$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función *f(x)* y el eje OX.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa x = 0.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0'8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:
a) Una persona que trabaja.
b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica σ = 20 descargas.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99'5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supóngase que μ = 100 descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) Calcúlese la matriz X tal que A · X = B.

a) Hagamos el producto de las matrices y comprobemos si se obtiene la matriz identidad.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-8 & -3+3\\ 24-24 & -8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=Id$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-8 & 3-3\\ -24+24 & -8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=Id$$

La matriz B es la inversa de A.

b)

$$A\cdot X = B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B = B\cdot B$$

$$X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+8 & -3-3\\ -24-24 & 8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -6\\ -48 & 17\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \le 50,\ 2x + y \le 80,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0.$$

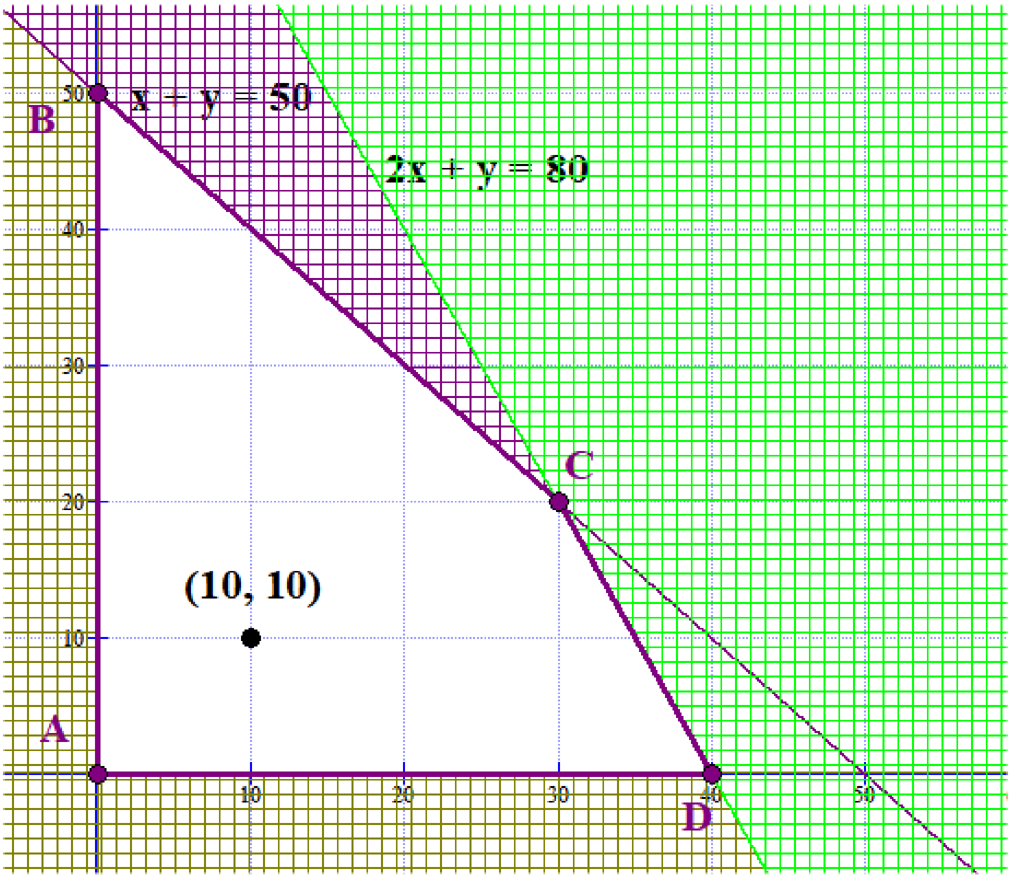
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase el valor máximo de la función *f(x, y) = 5x + 4y* en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

a) Para representar la región dibujamos las rectas asociadas y decidimos cual es la región valorando puntos de las regiones en que se divide el plano.

x	$y=50-x$
0	50
50	0
30	20

x	$y=80-2x$
0	80
40	0
30	20



La región es la zona blanca, ya que el punto (10, 10) cumple todas las condiciones.

$10 + 10 \leq 50,\ 20 + 10 \leq 80,\ \ 10 \geq 0,\ \ \ 10 \geq 0$

Las coordenadas de los vértices son los puntos de corte de las rectas que delimitan la región.

- A es (0, 0).
- B es (0, 50)
- C lo averiguamos resolviendo el sistema:

  $$\left.\begin{array}{l} x+y=50 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=50-x \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+50-x=80 \Rightarrow \boxed{x=30} \Rightarrow \boxed{y=50-30=20}$$

  C es (30, 20)
- D es (40, 0)

b) Este valor máximo se encuentra en uno de los vértices. Valoramos la función en cada uno de ellos para decidir el valor máximo de la función y donde se produce.

- A= (0, 0) → $f(0,\ 0)=0$
- B= (0, 50) → $f(0,\ 50)=0+200=200$
- C= (30, 20) → $f(30,20)=150+80=230$
- D= (40, 0) → $f(40,0)=200+0=200$

La función $f(x,\ y)=5x+4y$ alcanza su valor máximo en el punto C(30, 20) siendo este valor máximo 230.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\le 2 \\ \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \;\; x>2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si *f(x)* es continua en *x = 2*.
b) Calcúlese la función derivada de *f(x)* para *x < 2*.

a) Para que sea continua en x = 2 debe de existir la función y que los limites laterales sean iguales al valor de la función en ese punto.

- Existe *f(2)* y vale $f(2)=\dfrac{2+2}{2-1}=4$
- Existe $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{4}{1}=4$
- Existe $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=\dfrac{12-4}{4}=2$
- No son iguales, pues *f(2)=4≠2=* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. El valor de la función es igual que el limite lateral izquierdo, pero distinto del límite lateral derecho.

  La función no es continua en x = 2.

b) Para x < 2 la función es $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:
a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar la situación planteada.

	Reserva de hotel	No reserva	
Billete de transporte	**65**		**75**
No billete			
	80		**100**

Completamos la tabla para que las sumas horizontales y verticales sean correctas.

	Reserva de hotel	No reserva	
Billete de transporte	**65**	**10**	**75**
No billete	**15**	**10**	**25**
	80	**20**	**100**

Con estos datos podemos responder con facilidad a las preguntas planteadas.

a) $P(\text{Busca billete o reserva})=\dfrac{65+10+15}{100}=\dfrac{90}{100}=\boxed{0,9}$

b) $P\left(\text{Busca billete / Busca reserva}\right)=\frac{65}{80}=\boxed{0,8125}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica σ = 0'5 gramos.
a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0'25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.
b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12'25 gramos, sabiendo que μ = 12 gramos.

a) X = Peso en gramos de un sobre de azúcar. X = N(μ, 0,5)

Si el nivel de confianza es 95% calculemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$1-\alpha=0,95\rightarrow\alpha=0,05\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,025\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0,975\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$$

Y el error vale:

$$Error=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96\cdot\frac{0,5}{\sqrt{n}}=0,25\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{1,96\cdot0,5}{0,25}\Rightarrow n=\left(\frac{1,96\cdot0,5}{0,25}\right)^2=15,36$$

El tamaño mínimo de la muestra es 16.

b) Si X = Peso en gramos de un sobre de azúcar. X = N(μ, 0,5)
Entonces la distribución de las medias es una normal:

$$\overline{X_{25}}=N\left(12,\frac{0,5}{\sqrt{25}}\right)\Rightarrow\overline{X_{25}}=N\left(12,\ 0,1\right)$$

Calculemos la probabilidad pedida.

$$P\left(\overline{X_{25}}>12,25\right)=\left\{Tipificamos\right\}=P\left(\frac{\overline{X_{25}}-12}{0,1}>\frac{12,25-12}{0,1}\right)=$$

$$=P\left(Z>2,5\right)=1-P\left(Z<2,5\right)=1-0,9938=\boxed{0,0062}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{c} x+ay+z=1 \\ ax+y+(a-1)z=a \\ x+y+z=a+1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para a = 3.

a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+a^2-a+a-\left(1+a^2+a-1\right)$$

$$|A|=1+\cancel{a^2}-\cancel{a}+\cancel{a}-\cancel{1}-\cancel{a^2}-a+\cancel{1}=1-a$$

$$|A|=0\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$$

Distinguiremos dos casos distintos.

CASO 1. a ≠ 1.
En este caso el rango de la matriz A de coeficientes es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema tiene **solución única**. Es Compatible Determinado.

CASO 2. a = 1.
En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x+y=1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$ Tenemos la ecuación primera y la tercera que son iguales en el primer miembro de la igualdad, pero el segundo es un número distinto en cada caso. Este sistema es **incompatible**.

OTRA FORMA DE VERLO.

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La columna 1ª y 2ª son iguales, por lo que consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0+1+1-\left(0+2+1\right)=-1\neq 0$$

El rango de la matriz A/B es 3 ≠ 2 = rango de A. El sistema es **incompatible**.

b) Si a = 3 el sistema tiene solución única.
El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=3 \\ x+y+z=4 \end{array}\right\}$$

Hallamos la solución por el método de Cramer.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\cancel{1+6+3}-\cancel{1-9}-2=-2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1+24+3-4-9-2}{-2}=\frac{13}{-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3+2+12-3-3-8}{-2}=\frac{3}{-2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4+9+3-1-36-3}{-2}=\frac{-24}{-2}=12$$

La solución es $x=-\frac{13}{2};\ y=-\frac{3}{2};\ z=12$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) El dominio de la función $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ son todos los números reales salvo los que anulan el denominador. Quitamos x = –1 del dominio. $Dominio=\mathbb{R}-\{-1\}$.

- Asíntota vertical. $x=a$

  Es $\boxed{x=-1}$ ya que $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty$

- Asíntota horizontal. $y=b$

  $$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

  No existe asíntota horizontal.

- Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-x}{x^2+2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\right)=-2$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y=x-2}$

b) Utilizamos la derivada para este estudio.

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)x^3}{(x+1)^4}=\frac{\cancel{(x+1)}\left(3x^2(x+1)-2x^3\right)}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

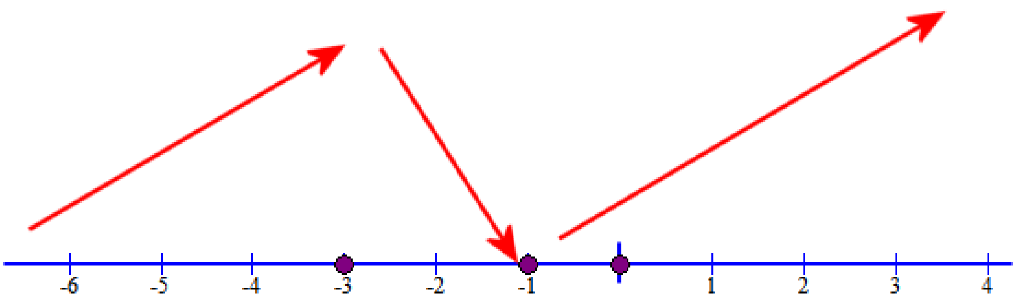
$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$$

Para obtener los puntos críticos igualamos a cero la derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}=0\Rightarrow x^3+3x^2=0\Rightarrow x^2(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-3\end{cases}$$

Añadimos también el valor de x = –1 que hemos quitado del dominio.
Consideramos como puntos de posible cambio: x = –3, x = –1, x = 0.
Veamos cómo evoluciona la función.

- En $(-\infty,-3)$ tomo x = –5 la derivada vale $f'(-5)=\frac{(-5)^3+3(-5)^2}{(-5+1)^3}=\frac{-50}{-64}>0$. La función crece.
- En $(-3,-1)$ tomo x = –2 la derivada vale
$f'(-2)=\frac{(-2)^3+3(-2)^2}{(-2+1)^3}=\frac{-8+12}{-1}=-4<0$. La función decrece.
- En $(-1,0)$ tomo x = –0,5 la derivada vale
$f'(-0,5)=\frac{(-0,5)^3+3(-0,5)^2}{(-0,5+1)^3}=\frac{-0,125+0,75}{0,125}=\frac{0,625}{0,125}>0$. La función crece.
- En $(0,+\infty)$ tomo x = 1 la derivada vale $f'(1)=\frac{1^3+3}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0$. La función crece.



La función crece en $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ y decrece en $(-3,-1)$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función *f(x)* y el eje OX.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa x = 0.

a) Veamos si la función corta al eje OX.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 5x + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \dfrac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} = \dfrac{5+1}{4} = 1{,}5 \\ = \dfrac{5-1}{4} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

La función corta el eje OX en los puntos x = 0; x = 1 y x = 1,5

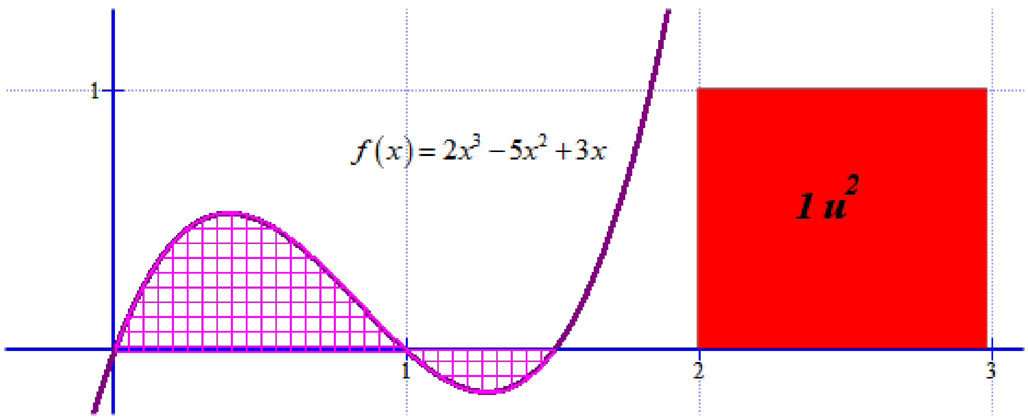
El recinto delimitado por la función y el eje se divide en dos partes, calculamos el área de cada trozo y el área total será la suma de las dos.

$$\left| \int_0^1 2x^3 - 5x^2 + 3x dx \right| + \left| \int_1^{1,5} 2x^3 - 5x^2 + 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{2} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{2} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_1^{1,5} \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{1^4}{2} - 5\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 5\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] \right| + \left| \left[\frac{1,5^4}{2} - 5\frac{1,5^3}{3} + 3\frac{1,5^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{2} - 5\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right| + \left| 0,28125 - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{1}{3} \right| + \left| -0,05 \right| = \boxed{0,38\, u^2}$$

No nos pide dibujar la función, pero lo hacemos para comprobar que el área es tan pequeña como hemos obtenido.



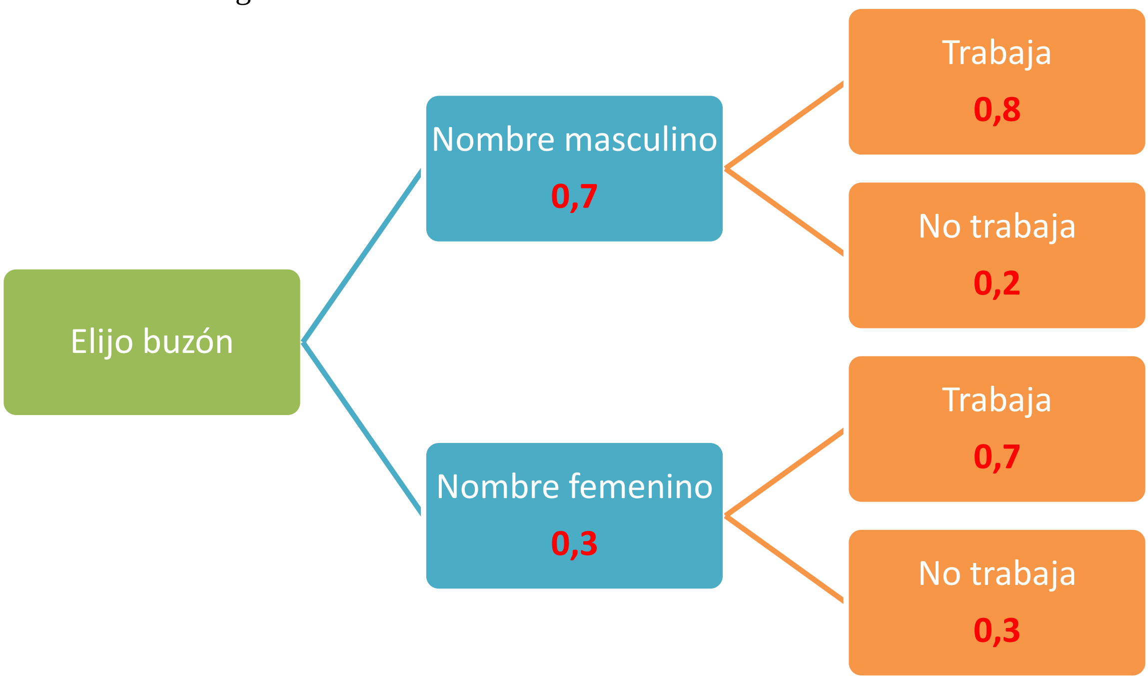
b) La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$ en x = 0 tiene la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x^3-5x^2+3x \Rightarrow f'(x)=6x^2-10x+3 \Rightarrow f'(0)=3 \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow \boxed{y=3x}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0'8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:
a) Una persona que trabaja.
b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(Trabaja)=P(\text{Es hombre y trabaja})+P(\text{Es mujer y trabaja})=$$

$$=P(\text{Es hombre})P(\text{Trabaja / Es hombre})+P(\text{Es mujer})P(\text{Trabaja / Es mujer})=$$

$$=0,7\cdot 0,8+0,3\cdot 0,7=0,56+0,21=\boxed{0,77}$$

b)

$$P(\text{Hombre / Trabaja})=\frac{P(\text{Hombre y Trabaja})}{P(\text{Trabaja})}=\frac{0,7\cdot 0,8}{0,77}=\frac{0,56}{0,77}=\frac{8}{11}=\boxed{0,727}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica σ = 20 descargas.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99'5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supóngase que μ = 100 descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

X = Número de descargas por hora. X = N(μ,20)

a) Se toma n = 40, $\overline{x} = 99,5$.

El nivel de confianza es 95 % → 1–∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 → $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ → $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

Buscando en la tabla de la normal el valor 0,975 encontramos $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Con todos estos datos, aplicamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{40}} = 6,198$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(99'5 - 6'198, 99'5 + 6'198\right) = \left(93'302, 105'698\right)$$

b) X = Número de descargas por hora. X = N(100,20)

$$\overline{X_{10}} = N\left(100, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \overline{X_{10}} = N\left(100, 6'32\right)$$

La probabilidad pedida es:

$$P\left(100 < \overline{X_{10}} < 110\right) = P\left(\frac{100-100}{6,32} < Z < \frac{110-100}{6,32}\right) = P\left(0 < Z < 1,58\right) =$$

$$= P\left(Z < 1,58\right) - P\left(Z < 0\right) = \left\{\text{Busco en la tabla N(0,1)}\right\} = 0,9429 - 0,5 = \boxed{0,4429}$$