EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+kz=1 \\ -x+y-kz=0 \\ 2x-ky+2kz=-1 \end{array}\right\}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando k=1.

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ *y* $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo × representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P:(1,3,2) y es perpendicular a la recta.

$$r:\begin{cases} 3x-2y \qquad = -1 \\ \qquad 2y+3z=3 \end{cases}$$

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1}, & si \quad x\neq 1 \\ k-x, & si \quad x=1 \end{cases}$$

sea continua en x = 1.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$.

2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto A:$(1,3,-1)$.

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función (x) tenga como asíntota oblicua, cuando $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.
a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+k\cdot z=1 \\ -x+y-k\cdot z=0 \\ 2x-k\cdot y+2k\cdot z=-1 \end{array}\right\}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando k=1.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{pmatrix}$$ y su determinante vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix}=4k+2k+k^2-2k-2k-2k^2=-k^2+2k$$

Si igualamos a cero el determinante

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+2k=0 \Rightarrow -k(k-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ 0 \\ k=2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos distintos.

CASO 1. $k \neq 0 \ y \ k \neq 2$
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A será 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $k=0$
El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+y=0 \\ 2x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+y=0 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1-y=1 \\ \dfrac{1}{2}+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-2 \\ y=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \text{Esto es imposible}$$

El sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $k=2$
El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+2z=1 \\ -x+y-2z=0 \\ 2x-2y+4z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 1^{a} +2\cdot \text{Ecuación } 2^{a}} \\ 2x & -y & +2z & =1 \\ -2x & +2y & -4z & =0 \\ \hline & y & -2z & =1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 3^{a} - \text{Ecuación } 1^{a}} \\ 2x & -2y & +4z & =-1 \\ -2x & +y & -2z & =-1 \\ \hline & -y & +2z & =-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ y-2z=1 \\ -y+2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrcr} -y & +2z & = & -2 \\ y & -2z & = & 1 \\ \hline & 0 & = & -1 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ y-2z=1 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$$

Como este sistema tiene una ecuación imposible de cumplir también es incompatible.

b)

Para k = 1 el sistema es compatible determinado y queda:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª + 2 · Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & -y & +z & =1 \\ -2x & +2y & -2z & =0 \\ \hline & y & -z & =1 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & -y & +2z & =-1 \\ -2x & +y & -z & =-1 \\ \hline & & z & =-2 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=1 \\ y-z=1 \\ \boxed{z=-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y-2=1 \\ y+2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=3 \\ \boxed{y=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+1=3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución es $x=1,\ y=-1,\ z=-2$

2.
a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1), \vec{v}=(2,1,0)$ *y* $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo × representa el producto vectorial.
b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto *P*:(1,3,2) y es perpendicular a la recta.

$$r:\begin{cases} 3x-2y \quad =-1 \\ \quad 2y+3z=3 \end{cases}$$

a) Calculemos el vector $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2j+k-2k-i=-i+2j-k=(-1,2,-1)$$

El volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores es el valor de su producto mixto, que coincide con el valor absoluto del determinante de la matriz formada por las coordenadas de estos vectores.

$$\text{Volumen } = \left|\vec{w}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = |-1+4+1+2| = \boxed{6\,u^3}$$

b) Pasemos la ecuación de la recta a forma continua despejando de las dos ecuaciones de los planos que definen la recta r.

$$r:\begin{cases} 3x-2y \quad =-1 \\ \quad 2y+3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y=-1-3x \\ 2y=3-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1-3x}{-2}=\dfrac{3x+1}{2} \\ y=\dfrac{3-3z}{2}=\dfrac{3z-3}{-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{3x+1}{2}=y=\frac{3z-3}{-2}\Rightarrow r:\frac{x+1/3}{2/3}=y=\frac{z-1}{-2/3}$$

El vector director de la recta nos sirve como vector normal del plano.

$\vec{n}=\vec{v_r}=\left(\frac{2}{3},1,\frac{-2}{3}\right)$ y la ecuación del plano es:

$\frac{2}{3}x+y-\frac{2}{3}z+D=0$.

El plano pasa por P:(1, 3, 2) luego se cumple:

$$\frac{2}{3}+3-\frac{4}{3}+D=0\Rightarrow 2+9-4+3D=0\Rightarrow 7+3D=0\Rightarrow D=\frac{-7}{3}$$

La ecuación del plano es $\frac{2}{3}x+y-\frac{2}{3}z-\frac{7}{3}=0$. Simplificando queda $\boxed{\pi:2x+3y-2z-7=0}$

También podíamos haber hallado el vector director de la recta haciendo el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-6i+6k-9j=-6i-9j+6k=(-6,-9,6)$$

Este vector es –6 veces el vector de la recta obtenido por el otro método, pero nos llevaría al mismo resultado. De hecho podíamos haber multiplicado el primer vector por 3 para quitar denominadores o bien dividir este segundo por 3 para tener coordenadas más pequeñas.

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1}, & si \quad x\neq 1 \\ k-x, & si \quad x=1 \end{cases}$$

sea continua en x = 1.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

a) Antes de calcular el límite voy a simplificar la expresión aplicando propiedades de los logaritmos.

$$\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\ln(1+0)}-\frac{1}{0}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right)=\frac{0-\ln 1}{0\cdot\ln 1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+x\cdot\frac{1}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1+x-1}{\cancel{1+x}}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{\cancel{1+x}}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

b) La función es continua en x = 1 cuando se cumple:

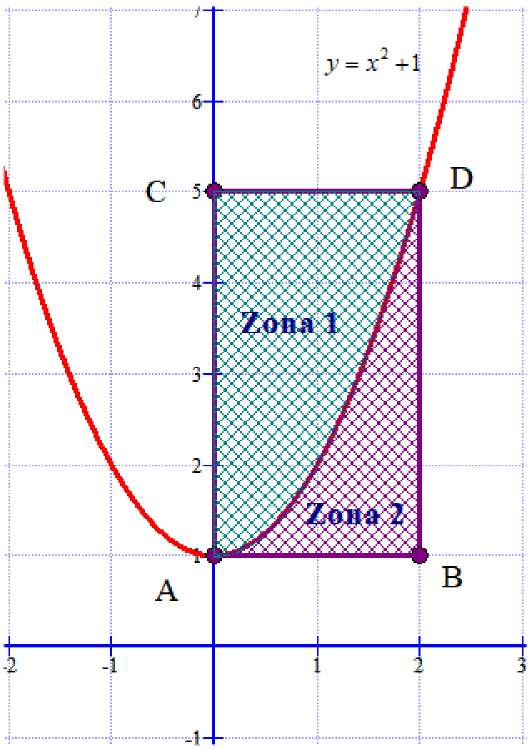
- Existe $f(1)=k-1$
- Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$. Lo calculamos…

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\left\{\begin{array}{l}\text{Factorizamos el polinomio del numerador}\\ \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1\\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{|0}\end{array}\\ x^4-1=(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^3+x^2+x+1\right)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}x^3+x^2+x+1=4$$

- Los dos valores son iguales → $k-1=4\Rightarrow\boxed{k=5}$

c) Dibujemos el rectángulo y la gráfica de la función.



El rectángulo tiene de área 2 · 4 = 8 u^2.

Calculemos el área de la zona 2 haciendo uso de la integral. Es la integral definida de la parábola menos la recta y = 1, entre 0 y 2.

$$\text{Área zona } 2=\int_0^2 \left(x^2+1\right)-1dx=\int_0^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left[\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{0^3}{3}\right]=\boxed{\frac{8}{3}=2,66\,u^2}$$

El área de la zona 1 será la diferencia entre el área del rectángulo y el área de la zona 2.

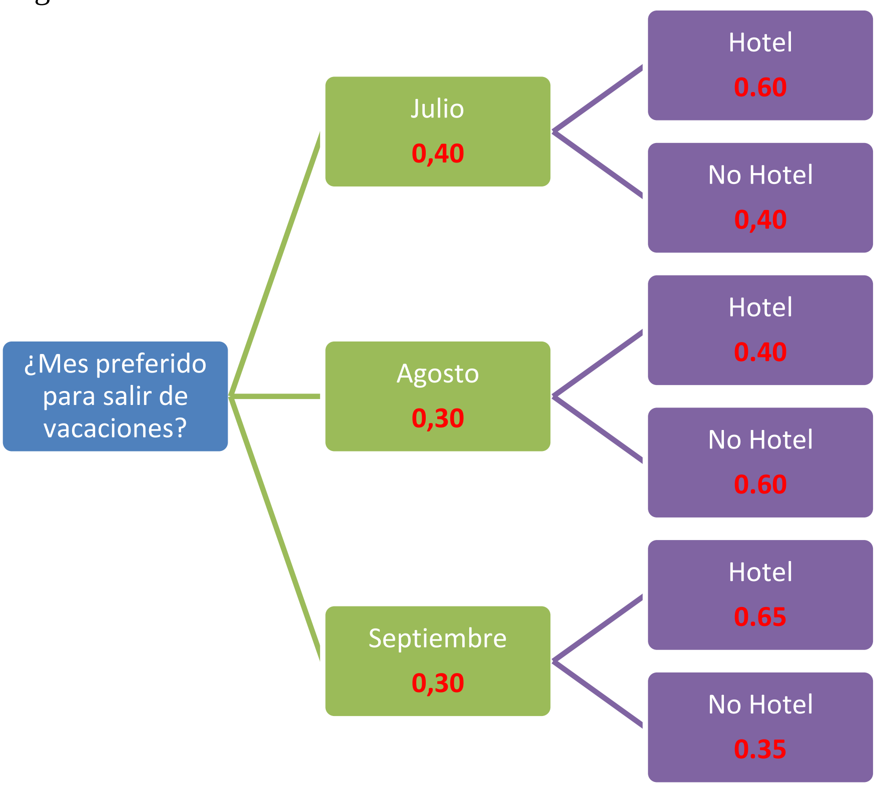
$$\text{Área zona } 1=8-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{16}{3}=5,33\,u^2}$$

El área de la zona 1 también se puede calcular como la integral definida de la recta y = 5 menos la parábola entre 0 y 2.

$$\text{Área zona } 1=\int_0^2 5-\left(x^2+1\right)dx=\int_0^2 4-x^2dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left[8-\frac{2^3}{3}\right]-\left[0-\frac{0^3}{3}\right]=8-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{16}{3}=5,33\,u^2}$$

4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.
a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.
b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.
c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Vaya a hotel y le guste ir en agosto}) =$$
$$= P(\text{Le guste ir en agosto}) \cdot P(\text{Vaya a hotel } / L\text{e gusta ir en agosto}) = 0,3 \cdot 0,4 = \boxed{0,12}$$

b)

$$P(\text{Vaya a hotel}) =$$
$$= P(\text{Le guste ir en Julio y vaya a hotel}) + P(\text{Le guste ir en agosto y vaya a hotel}) +$$
$$+ P(\text{Le guste ir en septiembre y vaya a hotel}) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,65 = \boxed{0,555}$$

c)

$$P(\text{Prefiera ir en agosto / No elige hotel}) = \frac{P(\text{Prefiere ir en agosto y No elige hotel})}{P(\text{No elige hotel})} =$$
$$= \frac{P(\text{Prefiere ir en agosto}) \cdot P(\text{ No elige hotel / Prefiere ir en agosto})}{1 - P(\text{Elige hotel})} =$$
$$= \frac{0,3 \cdot 0,6}{1 - 0,555} = \frac{0,18}{0,445} = \boxed{0,404}$$

OPCIÓN B

1.
a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & m & 1\\ 0 & -2 & m\end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m=-1$.

a) Calculamos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & m & 1\\ 0 & -2 & m\end{vmatrix}=m^2-3m+2$$

Lo igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}=\frac{3+1}{2}=2\\ =\frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Existen tres casos distintos.

CASO 1. $m\neq 1$ y $m\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3 (el máximo posible)

CASO 2. $m=1$

La matriz queda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Su determinante vale 0, por lo que su rango es menor de 3.

¿Rango de A es 2?

El menor de orden 2 que se obtiene quitando la fila y columna 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0$$

El rango de A es 2

CASO 3. $m=2$

La matriz queda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Su determinante vale 0, por lo que su rango es menor de 3.

¿Rango de A es 2?

El menor de orden 2 que se obtiene quitando la fila y columna 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el rango de A es 3, si $m = 1$ o $m = 2$ el rango de A es 2.

b) Para m = –1 la matriz tiene determinante no nulo y tiene inversa. La matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ con } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1+3+2 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}}$$

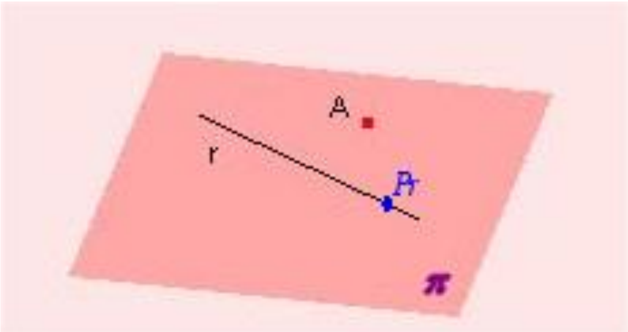
2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto A:(1,3,−1).

El punto no pertenece a la recta

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases} \\ \text{A}: (1,3,-1). \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3+3 = -1 \\ 12-3 = 5 \end{cases} \text{ No se cumple ninguna de las igualdades}$$



Hallemos un vector director de la recta y un punto de la misma.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases} \\ \boxed{x = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = -1} \\ 4y + 3z = 5 \end{cases} \Rightarrow -4 + 3z = 5 \Rightarrow 3z = 9 \Rightarrow \boxed{z = 3}$$

Un punto de la recta es $P_r(0,-1,3)$

Hallemos un segundo punto de la recta.

$$r:\left.\begin{cases} 3x+y=-1 \\ 4y+3z=5 \end{cases} \\ \boxed{x=1}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=-4} \\ 4y+3z=5 \end{cases} \Rightarrow -16+3z=5 \Rightarrow 3z=21 \Rightarrow \boxed{z=7}$$

Un segundo punto de la recta es $Q_r\left(1,-4,7\right)$

El vector director de la recta es $\vec{v_r}=\overrightarrow{P_rQ_r}=\left(1,-4,7\right)-\left(0,-1,3\right)=\left(1,-3,4\right)$

Necesitamos dos vectores directores y un punto para definir el plano.
El plano que contiene a la recta tiene como primer vector director el de la recta $\vec{u}=\vec{v_r}=\left(1,-3,4\right)$, y como segundo vector director el vector que une el punto A:(1,3,−1) con el punto $P_r\left(0,-1,3\right)$ de la recta.

$\vec{v}=\overrightarrow{AP_r}=\left(0,-1,3\right)-\left(1,3,-1\right)=\left(-1,-4,4\right)$

Podemos poner las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pasa por el punto } A\left(1,3,-1\right) \\ \vec{u}=\left(1,-3,4\right) \\ \vec{v}=\left(-1,-4,4\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\pi \equiv \left.\begin{array}{r} x=1+\alpha-\lambda \\ y=3-3\alpha-4\lambda \\ z=-1+4\alpha+4\lambda \end{array}\right\}}$$

O bien podemos hallar la ecuación general:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pasa por el punto } A\left(1,3,-1\right) \\ \vec{u}=\left(1,-3,4\right) \\ \vec{v}=\left(-1,-4,4\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12x+12-4y+12-4z-4-3z-3-4y+12+16x-16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi:4x-8y-7z+13=0}$$

La ecuación del plano es $\pi:4x-8y-7z+13=0$

3.
a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$$

Determine el valor de k para que la función (x) tenga como asíntota oblicua, cuando $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x\left(\ln\left(x\right)\right)^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

a) La asíntota oblicua tiene la expresión $y = mx + n$ donde $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^3 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2+2} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3} + kx^2 + x + 3 - \cancel{2x^3} - 4x}{x^2+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{kx^2 - 3x + 3}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = k$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + k$. Como debe ser $y = 2x - 1$, entonces $k = -1$.

b)

$$\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \left(\ln(x)\right)^2 \to du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \left(\ln(x)\right)^2 \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\ln(x)\right)^2 \frac{x^2}{2} - \int x \ln x dx = \boxed{Continua...}$$

Calculamos la integral primero y luego sustituimos.

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Sustituimos en la expresión inicial y queda

$$\boxed{...Continua} = \left(\ln(x)\right)^2 \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = \boxed{\left(\ln(x)\right)^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + K}$$

c) Calculemos su derivada

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{-1+x}{x^2}$$

Si igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1+x}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Calculamos la segunda derivada y comprobamos que tipo de punto crítico es.

$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{x^2+2x-2x^2}{x^4}=\frac{-x^2+2x}{x^4}=\frac{\cancel{x}(-x+2)}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{-x+2}{x^3}$$

Sustituimos x = 1

$$f''(1)=\frac{-1+2}{1^3}=\frac{1}{1}=1>0$$

$\boxed{\text{x = 1 es un mínimo}}$

Buscamos los puntos de inflexión igualando a cero la derivada segunda.

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x^3}=0 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2$$

Calculamos la derivada tercera

$$f''(x)=\frac{-x+2}{x^3} \Rightarrow f'''(x)=\frac{-x^3-(-x+2)3x^2}{x^6}=\frac{-x^3+3x^3-6x^2}{x^6}=\frac{2x^3-6x^2}{x^6}=\frac{\cancel{x^2}(2x-6)}{\cancel{x^2}\cdot x^4}$$

$$f'''(x)=\frac{2x-6}{x^4}$$

Sustituimos x = 2 en la derivada tercera y comprobamos que no se anula.

$$f'''(2)=\frac{4-6}{2^4}=\frac{-2}{16}\neq 0$$

$\boxed{\text{x = 2 es un punto de inflexión}}$

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.
a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).
b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Del 1 al 25 hay 12 números pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.

La probabilidad de que un jugador gane es $p=\frac{12}{25}=0,48$.

a) Se trata de una distribución binomial, donde p = 0,48 y n = 100.

X = Número de veces que gana en 100 jugadas. X = B(100, 0,48).

Como el número de repeticiones es muy grande, lo podemos aproximar a una normal.
Como n es 100 y $n\cdot p=100\cdot 0,48=48>5$ y $n\cdot q=100\cdot 0,52=52>5$ esta aproximación es suficientemente fiable.
X se aproxima a una normal $N\left(np,\sqrt{npq}\right)=N\left(48,\sqrt{100\cdot 0,48\cdot 0,52}\right)=N(48,5)$

$$P(X=10)=P(9,5\le X\le 10,5)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{9,5-48}{5}\le\frac{X-48}{5}\le\frac{10,5-48}{5}\right)=$$

$$=P(-7,7\le Z\le -7,5)=P(7,5\le Z\le 7,7)=P(Z\le 7,7)-P(Z\le 7,5)=0$$

OTRA FORMA DE HACERLO
Si hacemos el cálculo sin aproximaciones.
X = Número de veces que gana en 100 jugadas. X = B(100, 0,48).

$$P(X=10)=\binom{100}{10}0,48^{10}\cdot 0,52^{90}=\frac{100!}{90!\cdot 10!}\cdot 0,48^{10}\cdot 0,52^{90}=3.09\cdot 10^{-16}$$

$$P(X=10)=0,000000000000000309$$

Prácticamente es cero.

Es razonable ya que la media de aciertos es 48 de cada 100 tiradas y 10 es un valor muy bajo comparado con la media.

b) Se trata de una distribución binomial, donde p = 0,48 y n = 200.

X = Número de veces que gana en 200 jugadas. X = B(200, 0,48).

Como el número de repeticiones es muy grande, lo podemos aproximar a una normal. n es 200, $n\cdot p=200\cdot 0,48=96>5$ y $n\cdot q=200\cdot 0,52=104>5$ esta aproximación es suficientemente fiable.

X se aproxima a una normal $N\left(np,\sqrt{npq}\right)=N\left(96,\sqrt{200\cdot 0,48\cdot 0,52}\right)=N(96,7,06)$

$$P(90\le X\le 110)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{90-96}{7,06}\le\frac{X-96}{7,06}\le\frac{110-96}{7,06}\right)=$$

$$=P(-0,85\le Z\le 1,98)=P(Z\le 1,98)-P(Z\le -0,85)=P(Z\le 1,98)-P(Z\ge 0,85)=$$

$$=P(Z\le 1,98)-\left(1-P(Z\le 0,85)\right)=0,9761-(1-0,8023)=0,9761-0,1977=\boxed{0,7784}$$