# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

**Curso 2018-2019**

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II    Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.
Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.
Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

## OPCIÓN A

### PROBLEMA 1

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

### PROBLEMA 2

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en $m^3/s$) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

(c) Hallar el valor del área encerrada por la función C(t) y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$. **(1 punto)**

### PROBLEMA 3

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(e) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un pino? **(1.5 puntos)**

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

**Curso 2018-2019**

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

## OPCIÓN B

### PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro $x$ no existe $(A \cdot B)^{-1}$. **(2 puntos)**

(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$. **(1.5 puntos)**

### PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & si \quad 2 \le x \le 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & si \quad 5 < x \le 8 \end{cases}$$

siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y $x$ el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes $A$ y $B$. **(2 puntos)**

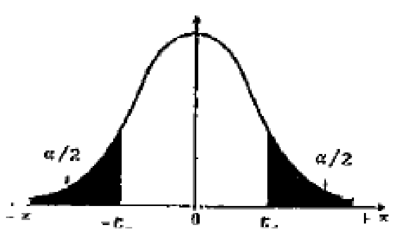
(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo [2, 5]. **(1 punto)**

### PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**




| $\alpha$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | $\infty$ | 2.576 | 2.326 | 2.170 | 2.054 | 1.960 | 1.881 | 1.812 | 1.751 | 1.695 |
| 0.1 | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | 1.440 | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.896 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |

# SOLUCIONES

## OPCIÓN A

**PROBLEMA 1**
Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**
(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

Llamemos x = número de cocinas vitrocerámicas; y = número de cocinas inducción.

Las restricciones de la situación son:

- El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas → $x+y\leq 20$
- El número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12 → $y\leq 12$
- Dispone de 3000 € para comprar las cocinas: vitro cuesta 100 € e inducción 200 € → $100x+200y\leq 3000$

Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 20 \\ y\leq 12 \\ 100x+200y\leq 3000 \Rightarrow x+2y\leq 30 \end{array}\right\}$$

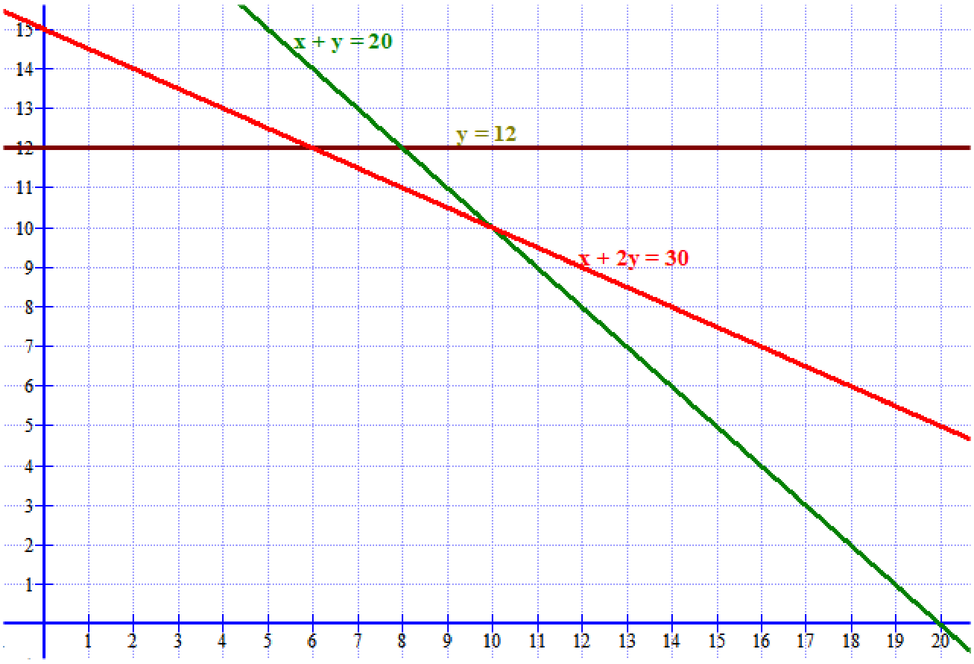
Por cada vitrocerámica obtiene un beneficio del 30% de 100€, es decir, 30 €.
Con x vitrocerámicas obtendrá un beneficio de 30x.
Por cada cocina de inducción obtiene un beneficio del 25 % de 200 €, es decir, 50€.
Con y cocinas de inducción obtendrá un beneficio de 50y

La función a maximizar es el beneficio → $B(x,y)=30x+50y$

Dibujemos las rectas asociadas a cada restricción:

| $x$ | $y=20-x$ |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 20 | 0 |

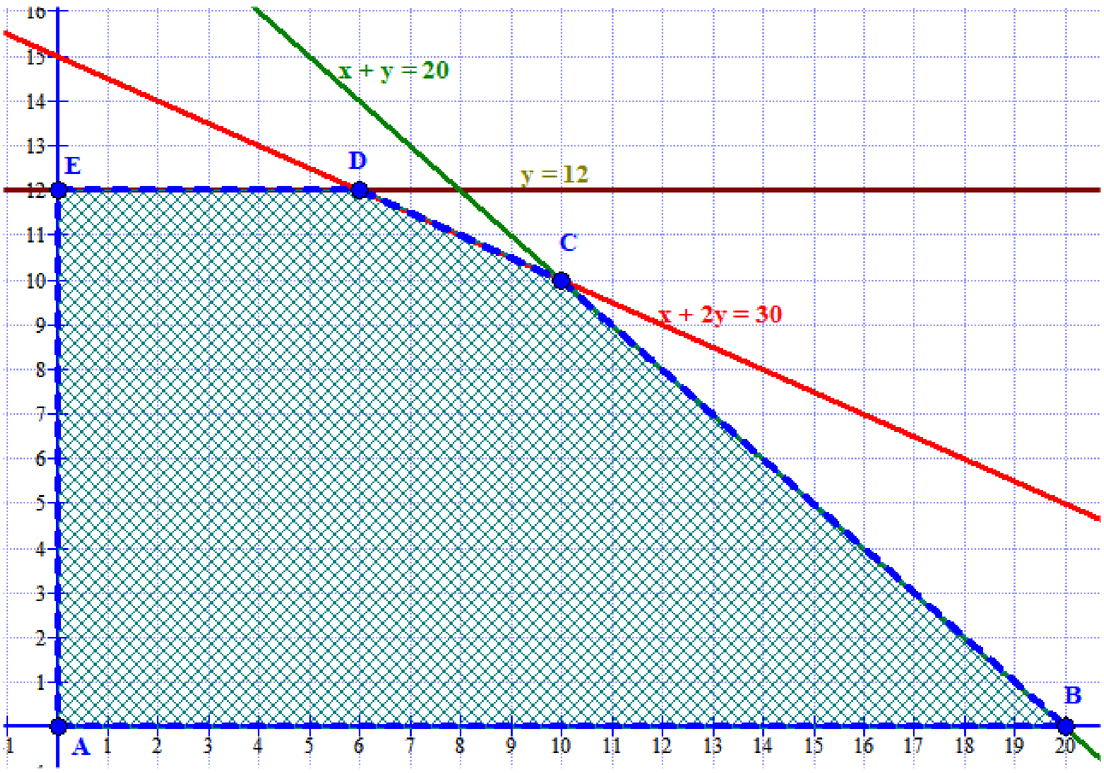
| $x$ | $y=(30-x)/2$ |
|---|---|
| 0 | 15 |
| 30 | 0 |




El punto (5,5) cumple todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 5\geq 0 \\ 5\geq 0 \\ 5+5\leq 20 \\ y\leq 12 \\ 5+2\cdot 5\leq 30 \end{array}\right\}$$

La región factible es:




Los vértices candidatos a maximizar el beneficio son A(0,0), B(20,0) E(0,12). D y E los hallamos resolviendo sendos sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} y=12 \\ x+2y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow x+24=30 \Rightarrow x=6 \text{ El punto D(6, 12)}$$

$$\left.\begin{matrix} x+y=20 \\ x+2y=30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=20-y \\ x+2y=30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 20-y+2y=30 \Rightarrow y=30-20=10 \Rightarrow x=20-10=10$$

El punto C(10,10)

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=30x+50y$ en cada uno de los puntos.

$A(0,0) \Rightarrow B(0,0)=0$

$B(20,0) \Rightarrow B(x,y)=600+0=600$

$C(10,10) \Rightarrow B(x,y)=300+500=800$

$D(6,12) \Rightarrow B(x,y)=180+600=780$

$E(0,12) \Rightarrow B(x,y)=600$

El máximo beneficio se produce con x = 10 e y = 10. Es decir, 10 cocinas vitrocerámicas y 10 cocinas de inducción. Siendo el beneficio de 800 €.

**PROBLEMA 2**

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en $m^3/s$) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t)=2t^3-21t^2+60t+20 \quad (0\le t\le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

(c) Hallar el valor del área encerrada por la función C(t) y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$. **(1 punto)**

a) Derivamos la función $C(t)=2t^3-21t^2+60t+20 \Rightarrow C'(t)=6t^2-42t+60$

Igualamos a cero.

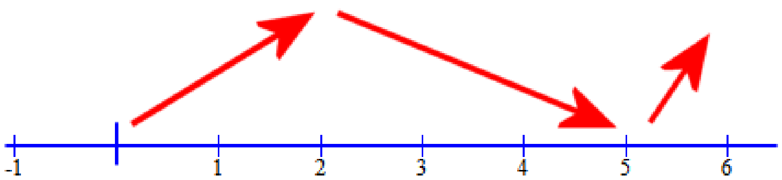
$$C'(t)=0 \Rightarrow 6t^2-42t+60=0 \Rightarrow t^2-7t+10=0 \Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases} =\dfrac{7+3}{2}=5 \\ =\dfrac{7-3}{2}=2 \end{cases}$$

Veamos cual es máximo y cual mínimo estudiando el signo de la derivada antes de 2, entre 2 y 5 y después de 5.

En $(0,2)$ tomamos x =1 y la derivada vale $C'(1)=6-42+60=22>0$ la función crece.

En $(2,5)$ tomamos x =3 y la derivada vale $C'(3)=54-126+60=-12<0$ la función decrece.

En $(5,6)$ tomamos x =5,5 y la derivada vale $C'(5,5)=6\cdot 30,25-231+60=10,5>0$ la función crece.




Valoramos el caudal en el momento 0 horas y 6 horas.

$C(0)=20 \qquad C(6)=432-21\cdot 36+360+20=56$

El máximo relativo en caudal se produce a las 2 horas y el mínimo relativo a las 5 horas. Veamos el caudal en esas horas.

$C(2) = 16 - 84 + 120 + 20 = 72$ $\quad C(5) = 250 - 525 + 300 + 20 = 45$

La hora de mínimo caudal es la hora 0 y la de máximo caudal es a las 2 horas.

b) El caudal máximo es de 72 y el mínimo es de 20.

c) Esta función no corta el eje de abscisas en ningún momento entre 3 y 5 ya que toma valores positivos. En 3 vale $C(3) = 54 - 188 + 180 + 20 = 66$ y luego baja hasta los 45 del mínimo y vuelve a subir hasta los 56 que vale el caudal en 6.

$$\int_3^5 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20dt = \left[2\frac{t^4}{4} - 21\frac{t^3}{3} + 60\frac{t^2}{2} + 20t\right]_3^5 = \left[\frac{t^4}{2} - 7t^3 + 30t^2 + 20t\right]_3^5 =$$

$$= \left[\frac{5^4}{2} - 7\cdot 5^3 + 30\cdot 5^2 + 20\cdot 5\right] - \left[\frac{3^4}{2} - 7\cdot 3^3 + 30\cdot 3^2 + 20\cdot 3\right] =$$

$$= \frac{625}{2} - 875 + 750 + 100 - \frac{81}{2} + 189 - 270 - 60 = 106$$

$\boxed{Área = 106\ u^2}$

**PROBLEMA 3**

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(e) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un pino? **(1.5 puntos)**

**(a)** $P(\text{Un pino elegido al azar esté infectado por la oruga}) = \frac{48}{120} = \boxed{0,4}$

**(b)** $P(\text{Sea elegido un árbol y esté infectado}) = \frac{25+9+48}{50+30+120} = \frac{82}{200} = \boxed{0,41}$

**(c)**

$P(\text{Sea un pino, sabiendo que está infectado}) =$

$$= \frac{\text{número de pinos infectados}}{\text{número de árboles infectados}} = \frac{48}{25+9+48} = \frac{48}{82} = \boxed{0,585}$$

## OPCIÓN B

**PROBLEMA 1**

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro $x$ no existe $(A\cdot B)^{-1}$ . **(2 puntos)**

(b) Hallar la matriz inversa de $A\cdot B$ para $x$ = l. **(1.5 puntos)**

a) Para que no exista la inversa $(A\cdot B)^{-1}$ debe ser su determinante nulo $|A\cdot B|=0$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1+2x & 1+0+2\\ 0+0-x & 2+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2x & 3\\ -x & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2\times 3)\ \cdot\ (3\times 2)\ =\ 2\times 2}$$

$$|A\cdot B|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-1+2x & 3\\ -x & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -1+2x+3x=0\Rightarrow -1+5x=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{5}}$$

No existe inversa para $x=\frac{1}{5}$

b) Para $x$ = l el producto $A\cdot B$ queda

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1+2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Su determinante vale:

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+3=4\neq 0$$

Calculamos su inversa con la fórmula

$$(A\cdot B)^{-1}=\frac{Adj\left((A\cdot B)^t\right)}{|A\cdot B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}}{4}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix}1/4 & -3/4\\ 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -3/4\\ 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

**PROBLEMA 2**

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x)=\begin{cases} 3+Ax & si \quad 2\le x\le 5 \\ 53+2x+Bx^2 & si \quad 5<x\le 8 \end{cases}$$

siendo *F(x)* la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y *x* el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. **(2 puntos)**

(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo [2, 5]. **(1 punto)**

(a) Como para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros, esto significa que $F(5)=13 \Rightarrow 3+5A=13 \Rightarrow 5A=10 \Rightarrow \boxed{A=\frac{10}{5}=2}$

Para que la función sea continua en x = 5 debe cumplirse:

- Existe $F(5)=13$
- Existe $\lim\limits_{x\to 5^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} 3+2\cdot 5=13$
- $\lim\limits_{x\to 5^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} 53+2x+Bx^2 = 53+10+25B=25B+63$
- Los tres valores deben ser iguales. $25B+63=13 \Rightarrow 25B=-50 \Rightarrow \boxed{B=-\frac{50}{25}=-2}$

Los valores buscados son $A=2 \ y \ B=-2$.

(b) Buscamos las asíntotas de la función $f(x)=\frac{F(x)}{x^2-3x-4}=\frac{3+2x}{x^2-3x-4}$ .

Hallamos primero el dominio, que son todos los números reales del intervalo [2, 5] menos los valores que anulan el denominador.

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases} =\frac{3+5}{2}=4 \\ =\frac{3-5}{2}=-1 \end{cases}$$

De estos dos valores solo incluimos el x = 4, ya que el x = –1 no está en el intervalo [2, 5].

$$Dominio=[2,\ 4)\cup(4,\ 5]$$

Asíntotas verticales. $x=a$.

La asíntota vertical es $x=4$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{3+2x}{x^2-3x-4}=\frac{11}{0}=\infty$$

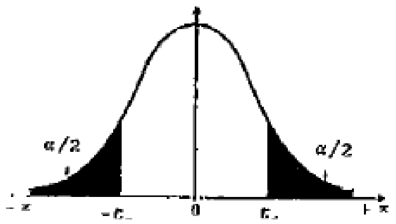
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{3+2x}{x^2-3x-4}=\frac{11}{0}=\infty$$

**PROBLEMA 3**

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**




| α | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | ∞ | 2.576 | 2.326 | 2.170 | 2.054 | 1.960 | 1.881 | 1.812 | 1.751 | 1.695 |
| 0.1 | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | 1.440 | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.896 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |

Sea X = Tiempo en horas que tarda en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono.

X = N(μ, 24)

(a)

$\bar{x} = 36\,h; \quad n = 100$

El nivel de confianza del 95% significa que

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1{,}96 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}} = 4{,}704$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (36 - 4{,}704,\ 36 + 4{,}704)$$

El intervalo de confianza es $(31'296,\ 40'704)$

(b) Como la amplitud del intervalo es 5 el error es la mitad, es decir, 2,5 h entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{24}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{24}{2{,}5} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1{,}96 \cdot \frac{24}{2{,}5}\right)^2 = 354{,}04$$

El tamaño mínimo de la muestra es 355 individuos.