Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Realiza una de las opciones A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Sea la expresión matricial $B^t - A\,X = B$ **,** siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz X. (1 punto)
ii) Calcule la matriz X. (2.5 puntos)

EJERCICIO 2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \le x \le 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)
ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)
iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)
iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

EJERCICIO 3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de **la** clase A y uno de B. Calcule:
i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)
ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias)

Opción B

EJERCICIO 1:
Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (Cl y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.
i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo Cl. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + xln(1-2x)$ (1 punto)
ii) Calcule $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)
iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2}dx$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)
ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES

Opción A

EJERCICIO 1:

Sea la expresión matricial $B^t - A\,X = B$ **,** siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz X. (1 punto)
ii) Calcule la matriz X. (2.5 puntos)

i) $B^t - A\,X = B \Rightarrow -AX = B - B^t \Rightarrow AX = -B + B^t$

Si A es invertible podemos despejar X multiplicando por la matriz inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

Esto demuestra que A es invertible y existe A^{-1}. Y seguimos despejando..

$$AX = -B + B^t \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\left(-B + B^t\right) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}\left(-B + B^t\right)}$$

ii) Debemos de hallar la inversa de A y luego hacer las operaciones indicadas.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(-B + B^t\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left[-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = -\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 & 6+3 & -6-6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6+3 & -3-3 & 3+6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)

ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)

iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)

iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

i) Si x = 0 la función beneficio da un valor de $f(0) = -3(0)^2 + 30(0) + 20 = 20$. Da un beneficio de 20.000 €.

Si x = 1 entonces $f(1) = -3 + 30 + 20 = 47$. El beneficio es de 47.000 €.

ii) Para obtener la x que da un máximo beneficio calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f(x) = -3x^2 + 30x + 20 \Rightarrow f'(x) = -6x + 30$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 30 = 0 \Rightarrow -6x = -30 \Rightarrow x = \frac{30}{6} = 5$$

Para ver si es máximo o mínimo utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = -6x + 30 \Rightarrow f''(x) = -6$$

Sustituyendo x = 5 tenemos $f''(5) = -6 < 0$. Luego x = 5 es un máximo.

Calculemos el beneficio con x = 0; x = 5 y x = 8.

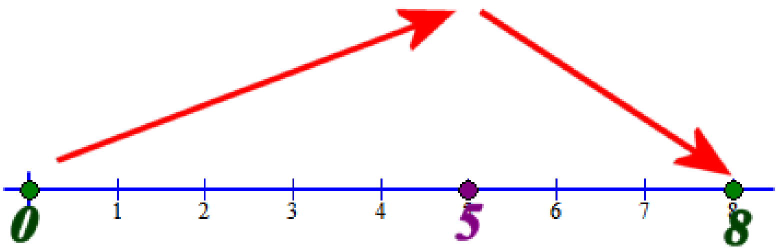
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 20 \\ f(5) = -75 + 150 + 20 = 95 \\ f(8) = -192 + 240 + 20 = 68 \end{array}\right\}$$

Tiene un máximo beneficio de 95.000 € con un gasto de 5000 € en publicidad.

iii) La derivada no cambia de signo en el intervalo (0,5), ni en (5,8). Veamos el signo en cada intervalo.

De 0 a 5000 € de gasto en publicidad, tomamos x =3 y la derivada vale $f'(3) = -18 + 30 = 12 > 0$. El beneficio va creciendo.

De 5000 a 8000 € de gasto en publicidad, tomamos x = 6 y la derivada vale $f'(6) = -36 + 30 = -6 < 0$. El beneficio va disminuyendo.



iv) Como:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=20 \\ f(5)=-75+150+20=95 \\ f(8)=-192+240+20=68 \end{array}\right\} \text{El beneficio mínimo se produce en gasto 0 € en publicidad.}$$

El beneficio en gasto 0 es de 20.000 €.

EJERCICIO 3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:
i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)
ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias)

i)
P(Ninguno estudie alemán) = P(No estudie alemán el alumno 1 de la clase A y no estudie alemán el alumno 2 de la clase A y no estudie alemán el alumno de la clase B) =

P(No estudie alemán el alumno 1 de la clase A) · P(No estudie alemán el alumno 2 de la clase A) · P(No estudie alemán el alumno de la clase B) =

$$=\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{20}{25}=\boxed{0,446}$$

ii)
P(Únicamente estudie uno de ellos alemán) = P(Estudie alemán el alumno 1 de la clase A y no estudie alemán el alumno 2 de la clase A y no estudie alemán el alumno de la clase B) + P(No estudie alemán el alumno 1 de la clase A y Estudie alemán el alumno 2 de la clase A y no estudie alemán el alumno de la clase B) + P(No estudie alemán el alumno 1 de la clase A y no estudie alemán el alumno 2 de la clase A y Estudie alemán el alumno de la clase B) =
P(Estudie alemán el alumno 1 de la clase A) · P(No estudie alemán el alumno 2 de la clase A) · P(No estudie alemán el alumno de la clase B) + P(No estudie alemán el alumno 1 de la clase A) · P(Estudie alemán el alumno 2 de la clase A) · P(No estudie alemán el alumno de la clase B) + P(No estudie alemán el alumno 1 de la clase A) · P(No estudie alemán el alumno 2 de la clase A) · P(Estudie alemán el alumno de la clase B) =

$$=\frac{10}{40}\cdot\frac{20}{39}\cdot\frac{20}{25}+\frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39}\cdot\frac{20}{25}+\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{5}{25}=\boxed{0,368}$$

iii)
P(Alguno de ellos estudie alemán) = 1 – P(Ninguno estudie alemán) = 1 – 0,446 = $\boxed{0,554}$

Opción B

EJERCICIO 1:
Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (Cl y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.
i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo Cl. (0.5 puntos)

i) Llamemos x = hectáreas dedicadas al cultivo C1; y = hectáreas dedicadas al cultivo C2.
Las restricciones de la situación planteada son:

- Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas → $x+y\geq 4$
- Son necesarias 20 horas de maquinaria para cada hectárea del cultivo C1 y 10 horas para cada hectárea del cultivo C2. Solo disponemos de 180 horas de maquinaria → $20x+10y\leq 180 \Rightarrow 2x+y\leq 18$
- Son necesarios 100 kilos de abono para cada hectárea del cultivo C1 y 300 kilos de abono para cada hectárea del cultivo C2. Solo disponemos de 2400 kilos → $100x+300y\leq 2400 \Rightarrow x+3y\leq 24$

Las restricciones se resumen:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\geq 4 \\ 2x+y\leq 18 \\ x+3y\leq 24 \end{array}\right\}$$

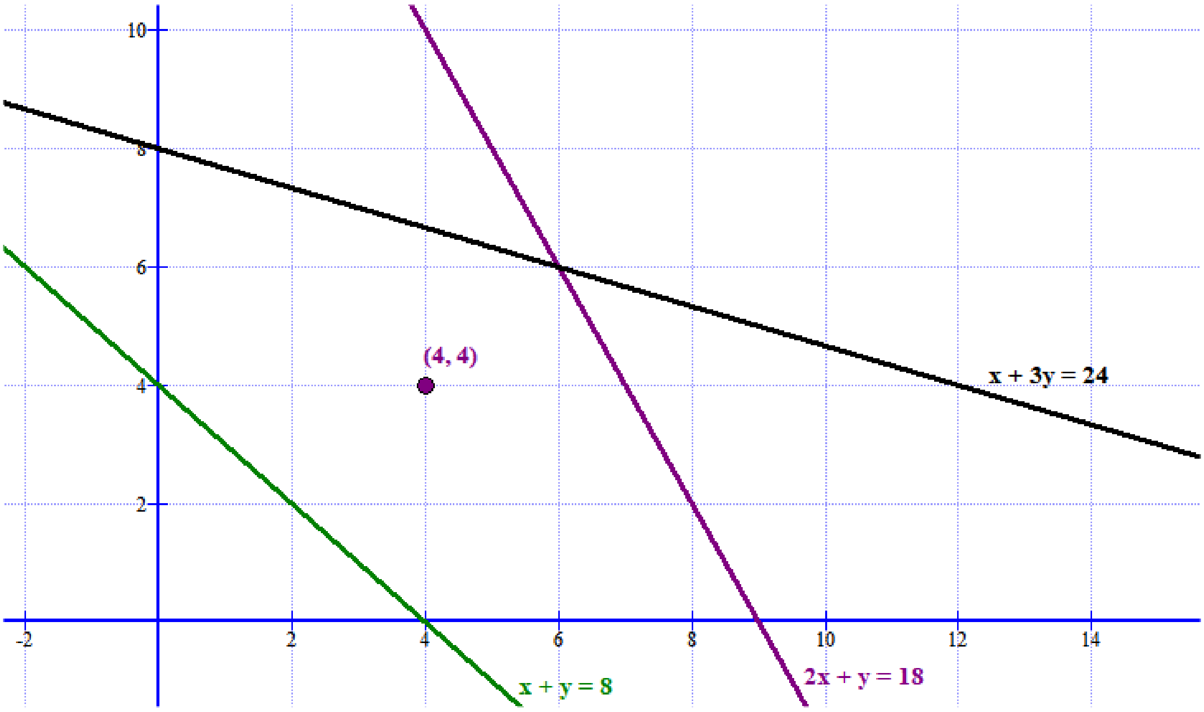
El beneficio neto obtenido por cada hectárea del cultivo C1 es de 3000 € y del C2 es de 1500 €.
La función beneficio es $B(x,y)=3000x+1500y$

ii) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones para localizar la región factible.

x	$y=4-x$
0	4
4	0

x	$y=18-2x$
0	18
9	0
6	6

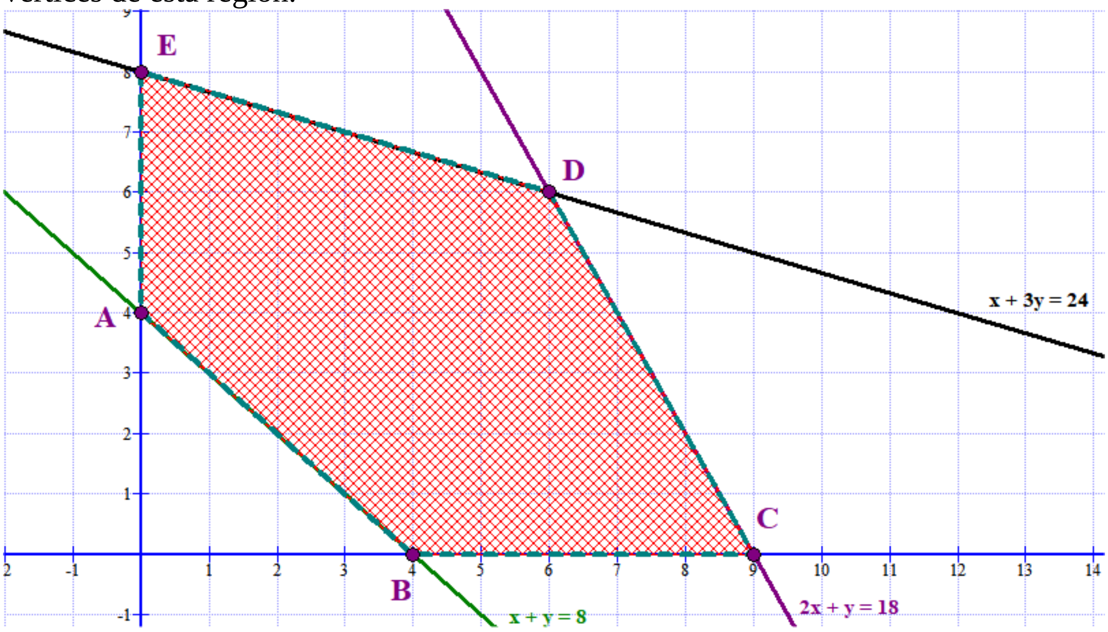
x	$y=\frac{24-x}{3}$
0	8
24	0
6	6



Comprobamos que el punto (4, 4) cumple todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \\ 4+4 \geq 4 \\ 8+4 \leq 18 \\ 4+12 \leq 24 \end{array}\right\}$$

La región factible es la zona rayada y los candidatos a maximizar el beneficio son los vértices de esta región.



Los vértices tienen coordenadas A(0, 4), B(4, 0), C(9, 0), D(6, 6) y E(0, 8). Veamos el beneficio que se obtiene en cada punto:

$A(0,\ 4) \rightarrow B(0,4) = 6000$

$B(4,\ 0) \rightarrow B(4,0) = 12000$

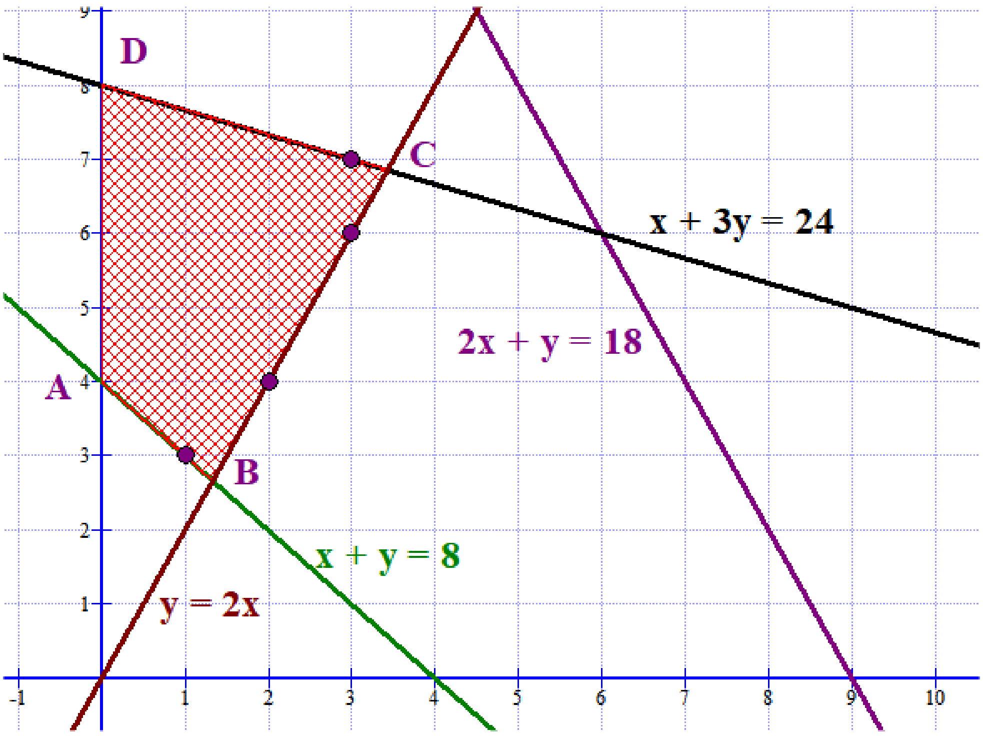
$C(9,\ 0) \rightarrow B(9,0) = 27000$

$D(6,\ 6) \rightarrow B(6,6) = 18000 + 9000 = 27000$

$E(0,\ 8) \rightarrow B(x,y) = 12000$

Se produce el mismo beneficio máximo en 2 puntos C y D. Esto significa que el máximo beneficio se obtiene en todo el segmento que une dichos vértices.
La solución es múltiple: 9 hectáreas de C1 y 0 de C2 o bien 6 hectáreas de C1 y 6 de C2. También 8 de C1 y 2 de C2, 7 de C1 y 4 de C2.

iii) Si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo Cl → $y > 2x$.
Con esa nueva restricción se reduce la región factible a la zona rayada del dibujo.



Los vértices B y C no tienen coordenadas enteras. Si nuestra solución debe ser entera solo nos valdrían los puntos próximos a ellos con coordenadas enteras.
A(0, 4), D(0, 8), E(1, 3), F(2, 4), G(3, 6) y H(3, 7). Calculamos el beneficio en cada punto.

$A(0,\ 4) \rightarrow B(0,4) = 6000$

$D(0,\ 8) \rightarrow B(0,8) = 12000$

$E(1,\ 3) \rightarrow B(1,3) = 3000 + 4500 = 7500$

$F(2,\ 4) \rightarrow B(2,4) = 6000 + 6000 = 12000$

$G(3,\ 6) \rightarrow B(3,6) = 9000 + 9000 = 18000$

$H(3,\ 7) \rightarrow B(3,7) = 9000 + 10500 = 19500$

El máximo beneficio es en el punto H(3,7), es decir, 3 hectáreas de C1 y 7 de C2.

EJERCICIO 2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + xln(1-2x)$ (1 punto)

ii) Calcule $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)

iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2}dx$ (1.5 puntos)

i)

$$f(x) = cos^3(5x^2) + xln(1-2x) \Rightarrow f'(x) = -3cos^2(5x^2)\text{sen}(5x^2)\cdot 10x + ln(1-2x) + x\frac{-2}{1-2x}$$

$$f'(x) = -30xcos^2(5x^2)\text{sen}(5x^2) + ln(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}$$

ii)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}} = \left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable} \\ 4x^2+1 = t \Rightarrow 8xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{dt}{8}\end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{dt}{8}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{8}2\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\sqrt{t}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}} = \left\{\begin{matrix}\text{Deshacemos el cambio de variable} \\ 4x^2+1 = t\end{matrix}\right\} = \boxed{\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + K}$$

iii)

$$\int_0^1 2xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 6xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\left[e^{3x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^3 - e^0\right) = \boxed{\frac{e^3-1}{3}}$$

EJERCICIO 3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)
ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

i) Los datos son $p=\frac{350}{500}=0,7; \quad n=500$.

Para un nivel de confianza del 96%

1 – ∝ = 0,96 → ∝ = 0,04 →∝/2 = 0’02 →1 – ∝/2 = 0,98 → $z_{\alpha/2}$ **= 2,055**

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado es:

$$\left(p-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)=$$

$$=\left(0,7-2,055\cdot\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{500}},\ 0,7-2,055\cdot\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{500}}\right)=\boxed{(0,658,0,742)}$$

ii) Los datos son $p=\frac{150}{500}=0,3; \quad n=500$.

Para un nivel de confianza del 92%

1 – ∝ = 0,92 → ∝ = 0,08 →∝/2 = 0’04 →1 – ∝/2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,75**

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado es:

$$\left(p-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)=$$

$$=\left(0,3-1,75\cdot\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{500}},\ 0,3-1,75\cdot\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{500}}\right)=\boxed{(0,29642,\ 0,3358)}$$