

**MATERIA:** MATEMÁTICAS II

**(3)**

**Convocatoria:**

**Instrucciones:**

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
- . Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

**SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA  
OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN**

**OPCIÓN A**

1. Dada la función  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa  $x = 0$  y  $x = -2$
- La función corta el eje  $OX$  en el punto  $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

**SOLUCIÓN**

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa  $x = 0$  y  $x = -2$

$$\rightarrow f'(0) = 0 \text{ y } f'(-2) = 0$$

Hallamos la primera derivada de la función  $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2bx + c$

Evaluamos,

$$f'(0) = c = 0$$

$$f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \rightarrow 3a - b = 8 \text{ (I)}$$

- La función corta el eje  $OX$  en el punto

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 1 + a + b + 7 = 0 \rightarrow a + b = -8 \text{ (II)}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{cases} \rightarrow a = 0 \text{ y } b = -8$$

Siendo la función  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

**2. Dado el sistema:**

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + k^2z &= 3k \end{aligned} \right\}$$

**a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro  $k$**

**b) Resolverlo para  $k = 2$**

**SOLUCIÓN**

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & k & 3k \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de  $A$  y los valores de  $a$  que lo anulan.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = 1 - k^2, \text{ entonces: } |A| = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{Por otro lado: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3k \end{vmatrix} = -3k - 3 \text{ que será } 0 \text{ para } k = -1$$

$$\text{Por otro lado el menor } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si  $k \neq \pm 1$ , entonces  $\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A^*) = n^\circ$  de incógnitas = 3

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Si  $k = 1$ , entonces:  $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A^*) = 3$ , entonces por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

Si  $k = -1$ ,  $\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A^*) < n^\circ$  de incógnitas,

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado tendrá infinitas soluciones.

b) Para  $k = 2$  tenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + 4z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

Como  $|A| = 1 - a^2 = 1 - 4 = -3$ , el sistema es compatible determinado

Resolviendo por la Regla de Cramer (o cualquier otro método)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{27}{-3} = -9; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Y la solución es (1, -9, 3)

**3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:**

- es paralela a los planos de ecuaciones:  $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$  y  $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$

- pasa por el punto  $P(2, -1, 5)$

**SOLUCIÓN**

Vector normal al plano  $\pi_1$   $\vec{n}_{\pi_1} = (1, 3, -1)$

Vector normal al plano  $\pi_2$   $\vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, 3)$

Si  $r // \pi_1$  y  $r // \pi_2 \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k \rightarrow \vec{v}_r = (-8, -1, 5)$$

La ecuación de la recta que pasa por  $P(2, -1, 5)$  con dirección  $\vec{v}_r = (-8, -1, 5)$  es

$$r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 5) + t(-8, -1, 5) \text{ or } \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

(solo hallar una ecuación)

**4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.**

a) **Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.**

b) **¿Qué proporción de clientes son mujeres?**

c) **Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?**

**SOLUCIÓN**

Definimos los eventos

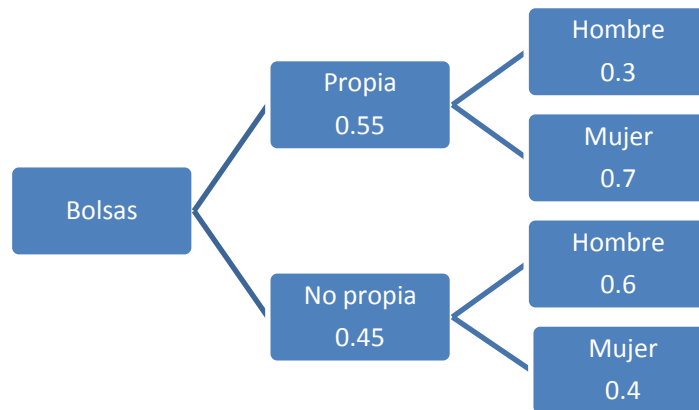
P: Que la bolsa de los clientes es propia

NP: Que la bolsa de los clientes no es propia

M: Que el cliente es mujer

H: Que el cliente es hombre

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado



b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

Por el Teorema de la probabilidad total

$$P(M) = P(P)P(M/P) + P(NP)P(M/NP) = (0.55)(0.7) + (0.45)(0.4) = 0.565$$

El 56.5% de los clientes que entran al supermercado traigan o no su propia bolsa son mujeres.

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Aplicando el Teorema de Bayes

$$P(P/H) = \frac{P(P)P(H/P)}{P(H)} = \frac{(0.55)(0.3)}{1 - 0.565} = 0.379$$

Existe un 38% de probabilidades de que un cliente elegido al azar, siendo hombre, haya traído su propia bolsa

**Instrucciones:**

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
- . Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

**OPCIÓN B**

**1. Dada la parábola de ecuación  $y = 4 - x^2$  y la recta de ecuación  $y = x + 2$**

- Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores.**
- Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas.**
- Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas.**

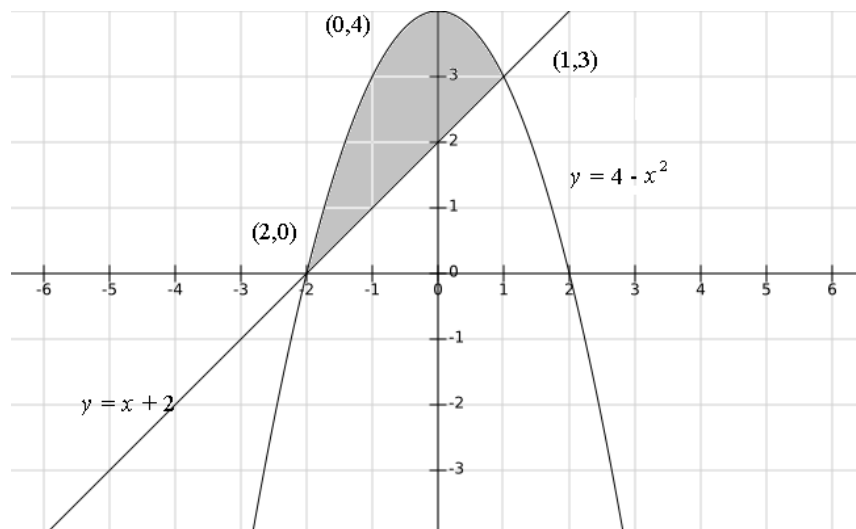
**SOLUCIÓN**

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores

$$4 - x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ o } x = -2$$

Siendo los puntos de intersección  $(-2,0)$  y  $(1,3)$

b) Esbozar el gráfico de ambas.



c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas

Plantear la integral y límites integración correctos  $A = \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx$

Integrar y evaluar la integral  $\int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-2}^1 = \frac{11}{2} u^2$

2. Sea la matriz  $C = A \cdot B$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar los valores de  $m$  para los que existe inversa de la matriz  $C$

b) Calcular la matriz inversa de  $C$  en el caso de  $m = 2$

**SOLUCIÓN**

a) Encontrar los valores de  $m$  para los que  $C$  tenga inversa.

**SOLUCIÓN**

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m + 1 & 2 + 2m \\ 1 - m & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists C \Leftrightarrow |C| \neq 0$  hallamos el determinante de la matriz  $C$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2m + 1 & 2 + 2m \\ 1 - m & 0 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2$$

$$|C| = 2m^2 - 2 = 0 \text{ si } m \neq \pm 1$$

Por tanto,  $\exists C^{-1} \forall m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Calcular la matriz inversa de  $C$  para  $m = 2$

$$\text{Para } m = 2 \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } |C| = 6$$

$$C^{-1} = \frac{Adj(C)^t}{|C|} Adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} Adj(C)^t = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

3. Hallar el ángulo que forman el plano  $\pi \equiv 2x - y + z = 0$  y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x + 1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$$

**SOLUCIÓN**

Vector normal al plano  $\pi \equiv 2x - y + z = 0 \quad \vec{n}_\pi = (2, -1, 1)$

Vector dirección de la recta  $r \quad \vec{v}_r = (-1, 1, 1)$

Vector dirección de la recta  $s \vec{v}_s = (-2,0,1)$

Comprobar posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$

Ecuaciones de las rectas  $r$  y  $s$  como intersección de dos planos

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad r \cap s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = 3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{col1} = \text{col4} \rightarrow |A^*| = 0 \rightarrow \text{Rang}(A^*) = 3$$

Como  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^*) =$  número de incógnitas, es un sistema compatible determinado, las rectas se cortan.

Sea  $\pi'$  el plano que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ , el vector normal a dicho plano viene dado por,

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j + 2k \rightarrow \vec{n}_{\pi'} = (1, -1, 2)$$

El ángulo que forman los planos  $\pi$  y  $\pi'$  es,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'}}{\|\vec{n}_{\pi}\| \|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{5}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})} = \frac{5}{6} \rightarrow \alpha = 33.5^\circ$$

**4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:**

- Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.
- Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año.
- Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

#### SOLUCIÓN

Se define la variable normal  $X$ : "periodo de vida en años de ventiladores de CPU"

$$X \sim N(18, 3.6)$$

- Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

$$P(X < 16) = P\left(Z < \frac{15-18}{3.6}\right) = P(Z < -0.83) = 1 - P(Z < 0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

Existe un 20.33% de probabilidades de que un ventilador funcione como mucho 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año.

$$P(X > 1) = P(X > 12) = P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525$$

Existe un 95.25% de probabilidades de que un ventilador funcione al menos un año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

$$P(1 < X < 2) = P(12 < X < 24) = P(-1.66 < Z < 1.66) = 0.9515 - (1 - 0.9515) = 0.903$$

Existe un 90% de probabilidades de que un ventilador funcione entre 1 y 2 años.