	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- **a)** Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{array}\right\}$$

(1 punto)

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

E2.- **a)** Consideremos los vectores $\vec{u}=(1,1,a)$ y $\vec{v}=(1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p}=(1,2,3)$ y $\vec{q}=(1,-2,-3)$ **(1,5 puntos)**

E3.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & si\ x<0 \\ x^2-4x & si\ x\geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en –1 y un mínimo relativo en 2. **(1,4 puntos)**
b) Probar que no posee extremo relativo en 0. **(0,6 puntos)**

E4.- **a)** Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{e^x-\cos x}$. **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a>1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=ax$ y $x=1$ sea 1. **(1 punto)**

E5.- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**
b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC. **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**
b) Indicar un punto en el que la función $f(x)=2x-\text{sen}x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a+\cos x & si \quad x\le 0 \\ x^2-2bx+1 & si \quad x>0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{3}$. **(2 puntos)**

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor**:**

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: A= "tener menos de 45 años", B= "tener entre 45 y 55 años", C = "tener más de 55 años" e I = "hablar inglés":

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$). **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

E1.- **a)** Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{array}\right\}$$

(1 punto)

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

a)

El sistema tiene más incógnitas que ecuaciones por lo que no es compatible determinado, despejemos y discutamos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=z+1 \\ 2x+y=4-mz \end{array}\right\}$$

La matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ya que $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$.

El sistema es compatible indeterminado siempre. No depende del valor de m.

b) Para m = *1* el sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1+z \\ 2x+y=4-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+z-y \\ 2x+y=4-z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2z-2y+y=4-z \Rightarrow -y=2-3z \Rightarrow \boxed{y=-2+3z}$$

$$x=1+z+2-3z \Rightarrow \boxed{x=3-2z}$$

La solución es $x=3-2t,\ y=-2+3t,\ z=t$.

E2.- **a)** Consideremos los vectores $\vec{u}=(1,1,a)$ y $\vec{v}=(1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p}=(1,2,3)$ y $\vec{q}=(1,-2,-3)$

(1,5 puntos)

a) Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,1,a)(1,-1,a)=1-1+a^2=a^2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow a^2=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

b) Un vector $\vec{r}$ perpendicular a los vectores $\vec{p}=(1,2,3)$ y $\vec{q}=(1,-2,-3)$es su producto vectorial.

$$\vec{p}\times\vec{q}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-6i-3j+2k+2k-3j+6i=-6j+4k=(0,-6,4)$$

Hay muchos vectores perpendiculares, pero todos son de coordenadas múltiplo de las obtenidas.

$$\vec{r}=c(0,-6,4)=(0,-6c,4c)$$

Como además debe ser unitario, es decir, de módulo 1, se debe cumplir:

$$\left|\vec{r}\right| = \left|(0,-6c,4c)\right| = \sqrt{(-6c)^2+(4c)^2} = \sqrt{36c^2+16c^2} = \sqrt{52c^2}$$

$$\left|\vec{r}\right| = 1 \Rightarrow \sqrt{52c^2} = 1 \Rightarrow 52c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{52} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{52}}}$$

El vector es $\vec{r} = \left(0, \frac{-6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}\right)$

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & si\ x<0 \\ x^2-4x & si\ x\geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en –1 y un mínimo relativo en 2. **(1,4 puntos)**
b) Probar que no posee extremo relativo en 0. **(0,6 puntos)**

a) En $x = -1$ la función es $f(x) = -x^2-2x$. Esta función tiene derivada $f'(x) = -2x-2$, sustituyendo el valor $x = -1$ se tiene $f'(-1) = -2(-1)-2 = 2-2 = 0$ y además $f''(x) = -2 < 0$. Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

En $x = 2$ la función es $f(x) = x^2-4x$. Esta función tiene derivada $f'(x) = 2x-4$, sustituyendo el valor $x = 2$ se tiene $f'(2) = 2\cdot 2-4 = 0$ y además $f''(x) = 2 > 0$. Luego en $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo.

b) Veamos el signo de la derivada antes de 0 (x < 0) y después de 0 (x > 0).

Para x < 0 la función es $f(x) = -x^2-2x$ la derivada es $f'(x) = -2x-2$ y si tomamos un valor muy próximo a 0, por ejemplo –0,01 la derivada es
$f'(-0,01) = -2(-0,01)-2 = 0,02-2 = -1,98 < 0$

Para x > 0 la función es $f(x) = x^2-4x$ la derivada es $f'(x) = 2x-4$ y si tomamos un valor muy próximo a 0, por ejemplo 0,01 la derivada es
$f'(0,01) = 2(0,01)-4 = 0,02-4 = -3,98 < 0$

La derivada de la función $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & si\ x<0 \\ x^2-4x & si\ x\geq 0 \end{cases}$ es $f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & si\ x<0 \\ 2x-4 & si\ x>0 \end{cases}$ y no cambia de signo en un entorno de x = 0, es negativa y por tanto es decreciente en x = 0.

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{e^x - \cos x}$. **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1. **(1 punto)**

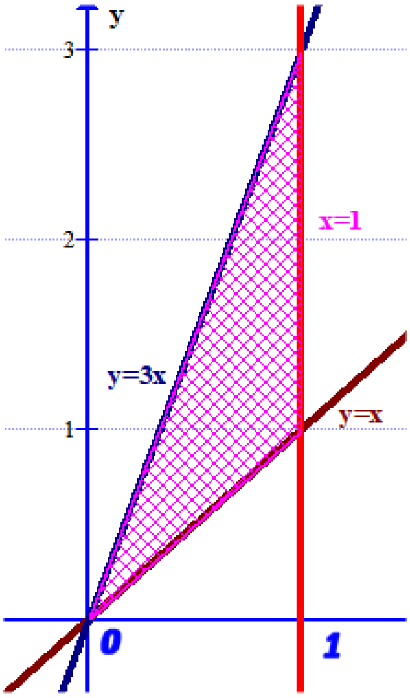
a) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{e^x - \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L´Hôpital}\} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + \text{sen}\, x} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

b) Veamos primero si las dos funciones se cortan.
$f(x) = g(x) \Rightarrow x = ax \Rightarrow x - ax = 0 \Rightarrow x(1-a) = 0 \Rightarrow x = 0$
Entonces el área de la región del plano es la integral definida:

$$Área = \left|\int_0^1 (x-ax)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{ax^2}{2}\right]_0^1\right| = \left|\left[\frac{1^2}{2}-\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0}{2}\right]\right| = \left|\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right| = \frac{a}{2}-\frac{1}{2}\,u^2$$

Ya que $a>1$ y por tanto $\frac{a}{2}>\frac{1}{2}$ y por tanto $\frac{a}{2}-\frac{1}{2}>0$

Como el área debe ser 1, entonces $\frac{a}{2}-\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{a-1}{2}=1 \Rightarrow a-1=2 \Rightarrow \boxed{a=3}$



E5.- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC. **(1 punto)**

Sea X = Temperatura del cuerpo humano. X = N(37, 0.5). Nos piden:

a)

$$P(36<X<38)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{36-37}{0,5}<\frac{X-36}{0,5}<\frac{38-37}{0,5}\right)=$$
$$=P(-2<Z<2)=P(Z<2)-P(Z<-2)=$$
$$=P(Z<2)-(1-P(Z<2))=$$
$$=0,9772-(1-0,9772)=\boxed{0,9544}$$

b)

$$P(X<36,5)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-37}{0,5}<\frac{36,5-37}{0,5}\right)=$$
$$=P(Z<-1)=1-P(Z<1)=1-0,843=\boxed{0,157}$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ x-y & 1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

Calculemos primero la inversa de la matriz N, comprobando previamente si existe.

$|N|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$ Existe la inversa y la calculamos con la fórmula:

$$N^{-1}=\frac{Adj\left(N^t\right)}{|N|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+2 & -(-1)\\ -(-1) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Averigüemos ahora el valor de x para que se cumpla $AM=N^{-1}$.

$$AM=N^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ x-y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+x-y & 1\\ -x+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-y & 1\\ -x+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=2\\ -x+y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=2\\ y=1+x\end{cases}\Rightarrow 2x-(1+x)=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-1-x=2\Rightarrow x=3$$

$$y=1+x=1+3=4$$

La solución es x = 3 e y = 4

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$(a,-1,2)\cdot(1,b,-2)=a-b-4=0\Rightarrow a-b=4$.

Además su producto vectorial es:

$$(a,-1,2)\times(1,b,-2)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ a & -1 & 2\\ 1 & b & -2\end{vmatrix}=2i+2j+abk+k+2aj-2bi=$$

$$=(2-2b)i+(2a+2)j+(ab+1)k=(2-2b,2a+2,ab+1)$$

Como debe tener las dos primeras coordenadas iguales, debe cumplirse:

$$2-2b=2a+2\Rightarrow-2b=2a\Rightarrow a=-b$$

Juntando las dos condiciones.

$$\left.\begin{matrix}a-b=4\\ a=-b\end{matrix}\right\}\Rightarrow-b-b=4\Rightarrow-2b=4\Rightarrow\boxed{b=-2}\Rightarrow\boxed{a=2}$$

La solución es a = 2 y b = –2.

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x)=2x-\operatorname{sen}x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

No se vé en Murcia

E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a+\cos x & si \quad x\le 0 \\ x^2-2bx+1 & si \quad x>0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$. **(2 puntos)**

Para que $f(x)=\begin{cases} a+\cos x & si \quad x\le 0 \\ x^2-2bx+1 & si \quad x>0 \end{cases}$ sea continua debe cumplir:

- *f(0)* existe y vale $f(0)=a+\cos 0=a+1$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-2bx+1\right)=1$ existe.
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(a+\cos x\right)=a+1$ existe.
- Los tres valores son iguales. a + 1 = 1 → a = 0

La segunda condición implica que:

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1 x^2-2bx+1dx=\frac{1}{3}\Rightarrow\left[\frac{x^3}{3}-bx^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\left[\frac{1^3}{3}-b\cdot 1^2+1\right]-\left[\frac{0^3}{3}-b\cdot 0^2+0\right]=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}-b+1=\frac{1}{3}$$

$$-b+1=0$$

$$b=1$$

Los valores pedidos son a = 0 y b = 1.

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor**:**

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: *A*= "tener menos de 45 años", *B*= "tener entre 45 y 55 años", *C* = "tener más de 55 años" e *I* = "hablar inglés":

a) Calcular *P(I/A), P(I/B) y P(I/C).* **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

a)

$$P(I/A)=\frac{P(I\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{100}}{\frac{50}{100}}=\frac{15}{50}=\boxed{0,30}$$

$$P(I/B)=\frac{P(I\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{100}}{\frac{30}{100}}=\frac{6}{30}=\boxed{0,20}$$

$$P(I/C)=\frac{P(I\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{20}{100}}=\frac{3}{20}=\boxed{0,15}$$

b) UNA FORMA DE HACERLO

$$P(A/I)=\frac{P(I\cap A)}{P(I)}=\frac{P(I\cap A)}{P(A)\cdot P(I\cap A)+P(B)\cdot P(I\cap B)+P(C)\cdot P(I\cap C)}=$$

$$=\frac{\frac{15}{100}}{\frac{50}{100}\cdot\frac{15}{50}+\frac{30}{100}\cdot\frac{6}{30}+\frac{20}{100}\cdot\frac{3}{20}}=\frac{\frac{15}{100}}{\frac{24}{100}}=\frac{15}{24}=\boxed{0,625}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Por pura lógica.

Si sabemos que habla inglés es uno de los 15 + 6 +3 = 24 que hablan inglés.

Como de todos estos solo 15 son menores de 45 años, la probabilidad pedida es $\frac{15}{24}=\boxed{0,625}$