Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+az=1 \\ ax+y-z=2 \\ 5x+3y+z=2a \end{array}\right\}$$

2. Sean los puntos A=(0,0,2), B=(2,0,1), C=(0,2,1) y D=(–2,2,–1).

a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C. **(2 puntos)**

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

3. Demuestre que la ecuación

$$sen(x^2) = x-1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

4. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcule el área de la región anterior.

5. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook. **(1 punto)**

b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook. **(1 punto)**

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa.**(1 punto)**

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$. **(1 punto)**

2. Dados los puntos A=(1,0,2) y B=(3,–2,–2). Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$.
(2 puntos)

4. Resuelve la integral **(2 puntos)**

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx$$

5. Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm? **(1 punto)**

b) ¿A partir de qué altura están el 33% de los habitantes más altos? **(1 punto)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+az=1 \\ ax+y-z=2 \\ 5x+3y+z=2a \end{array}\right\}$$

Consideramos la matriz de los coeficientes asociada al sistema.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3-10+3a^2-5a-2a+9=3a^2-7a+2$

Si igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow 3a^2-7a+2=0 \Rightarrow a=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm 5}{6}=\begin{cases} a=\frac{7+5}{6}=2 \\ a=\frac{7-5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Hay tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq 2 \ y \ a \neq \frac{1}{3}$

En este caso el rango de la matriz A es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $a=2$

La matriz de coeficientes y ampliada quedan:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de A no es 3 ya $|A|=0$ y debe ser 2 o 1. Su rango es 2 ya que el determinante de la matriz que queda quitando la 3ª fila y 3ª columna es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

El rango de A/B es 3 si el determinante de la matriz que queda al eliminar la 1ª columna es no nulo. Comprobemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-8+12+1+3-8-4=16-20=-4\neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Como rango de A y A/B son distintos el sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $a=\frac{1}{3}$

La matriz de coeficientes y ampliada quedan:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

El rango de A no es 3 ya que su determinante es nulo. Su rango es 2 ya que el determinante de la matriz que queda quitando la 3ª fila y 3ª columna es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix}=3-2/3=7/3\neq 0$$

El rango de A/B es 3 si el determinante de la matriz que queda al eliminar la 1ª columna es no nulo. Comprobemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1/3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2/3 \end{vmatrix}=-\frac{4}{3}+\frac{6}{3}+1+3-\frac{2}{9}-4=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}\neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Como rango de A y A/B son distintos el sistema es incompatible. No tiene solución.

2. Sean los puntos A=(0,0,2), B=(2,0,1), C=(0,2,1) y D=(–2,2,–1).

a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C. **(2 puntos)**

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

a) Obtengamos dos vectores directores del plano pedido.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,0,1)-(0,0,2)=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{AC}=(0,2,1)-(0,0,2)=(0,2,-1) \\ \text{Pasa por } A(0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$+4z-8+2y+2x=0$$

$$2x+2y+4z-8=0$$

$$\boxed{\pi: x+y+2z-4=0}$$

b) UNA FORMA DE HACERLO

Hallemos el producto mixto de los vectores que unen los puntos entre sí. Si da nulo son coplanarios, en caso contrario no son coplanarios y definen un paralelepípedo de volumen el valor absoluto de este producto mixto.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,0,1)-(0,0,2)=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{AC}=(0,2,1)-(0,0,2)=(0,2,-1) \\ \overrightarrow{AD}=(-2,2,-1)-(0,0,2)=(-2,2,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-12-4+4=-12\neq 0$$

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

OTRA FORMA DE HACERLO

Como tengo el plano que contiene a A, B y C, basta con ver si D está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+2z-4=0\\ D(-2,2,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow ¿-2+2-2-4=0?\Rightarrow ¿-6=0?$$

No se cumple y el punto D no está en el plano y los puntos no son coplanarios.

c) El área del triángulo formado por los puntos B, C y D es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen los puntos entre sí.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(0,2,1)-(2,0,1)=(-2,2,0)\\ \overrightarrow{BD}=(-2,2,-1)-(2,0,1)=(-4,2,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -2 & 2 & 0\\ -4 & 2 & -2\end{vmatrix}=-4i-4k+8k-4j=-4i-4j+4k=(-4,-4,4)$$

$$\Rightarrow \acute{A}rea=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{\sqrt{16+16+16}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=\boxed{2\sqrt{3}\,u^2}$$

3. Demuestre que la ecuación

$$sen(x^2)=x-1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

$$sen(x^2)=x-1\Rightarrow sen(x^2)-x+1=0$$

Considero la función $f(x)=sen(x^2)-x+1$ tenemos que encontrar un valor que anule esta función, para ello utilizamos el teorema de Bolzano.

En el intervalo (0,2), se cumple:

- $f(x)=sen(x^2)-x+1$ es continua en (0,2)
- $f(0)=sen(0)-0+1=1>0$; $f(2)=sen(4)-4+1=sen4-3<0$

Aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c\in(0,2)$ donde $f(\text{c})=0$. Este valor será solución de la ecuación del ejercicio.

4. Sean las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcule el área de la región anterior.

a) Veamos donde se cortan las funciones.

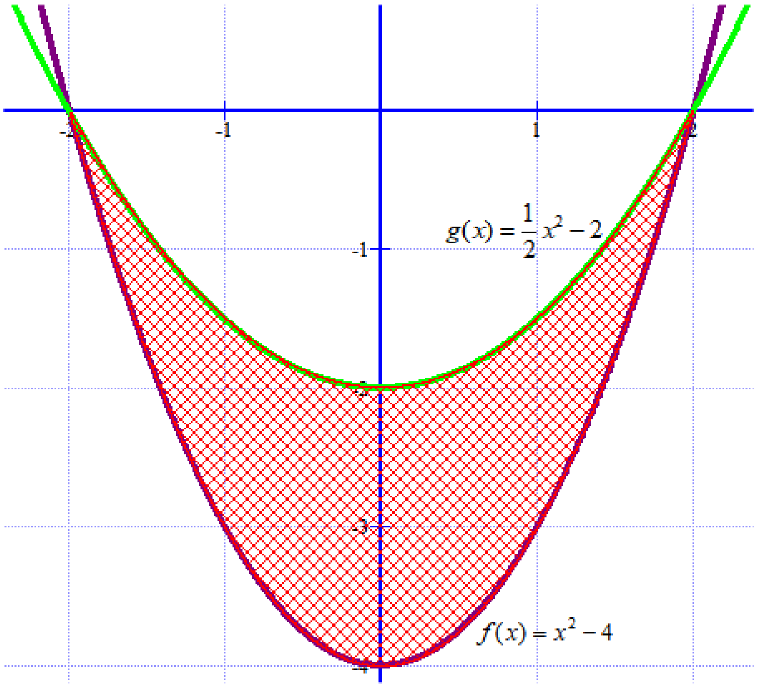
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4=\frac{1}{2}x^2-2\Rightarrow 2x^2-8=x^2-4$$

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Hacemos una tabla de valores para cada función entre -2 y 2.

x	$y=x^2-4$
-2	0
-1	$1-4=-3$
0	-4
1	-3
2	0

x	$y=\frac{1}{2}x^2-2$
-2	0
-1	$-1,5$
0	-2
1	$-1,5$
2	0



b)

$$Área=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}x^2-2-\left(x^2-4\right)dx=\int_{-2}^{2}-\frac{1}{2}x^2+2dx=$$

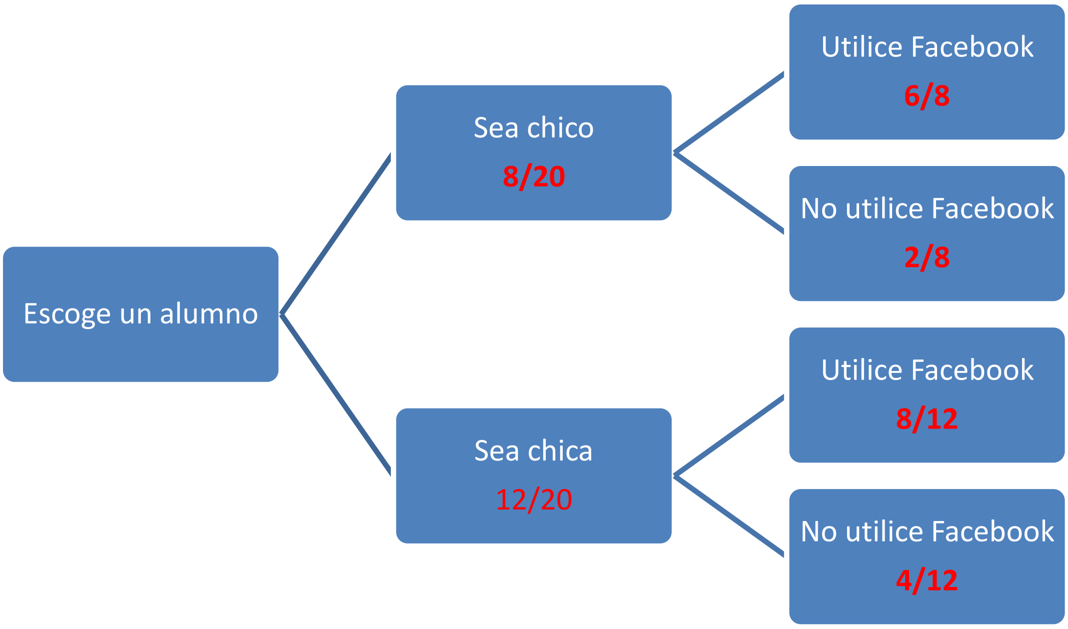
$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-2}^{2}=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right]-\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)^3}{3}+2(-2)\right]=-\frac{8}{6}+4-\frac{8}{6}+4=-\frac{8}{3}+8=\boxed{\frac{16}{3}u^2}$$

5. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook. **(1 punto)**

b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook. **(1 punto)**

a) Realicemos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



a)

$$P(Sea\ chica\ y\ utilice\ Facebook)=P(Sea\ chica)\cdot P(Utilice\ Facebook)=\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{12}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=\boxed{0,4}$$

b)

$$P(\text{Sea chico /Utiliza Facebook})=\frac{P(\text{Sea chico y utiliza Facebook})}{P(\text{Utiliza Facebook})}=$$

$$=\frac{P(\text{Sea chico})P(\text{utiliza Facebook / es chico})}{P(\text{Sea chico})P(\text{utiliza Facebook / es chico})+P(\text{Sea chica})P(\text{utiliza Facebook / es chica})}=$$

$$=\frac{\frac{8}{20}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{8}{20}\cdot\frac{6}{8}+\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{12}}=\frac{\frac{6}{20}}{\frac{6}{20}+\frac{8}{20}}=\frac{\frac{6}{20}}{\frac{14}{20}}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}=\boxed{0,428}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa. **(1 punto)**

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$. **(1 punto)**

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix} = -3-\lambda^2-\lambda+3\lambda^2 = 2\lambda^2-\lambda-3$$

Si igualamos a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2-\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} \lambda = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

La matriz A es siempre tiene inversa cuando $\lambda \neq -1$ *y* $\lambda \neq \frac{3}{2}$.

b) Para $\lambda = 1$ aplicamos la fórmula para hallar la inversa de $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-3-1-1+3} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}{-2}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dados los puntos A=(1,0,2) y B=(3,–2,–2). Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

Si el plano es perpendicular al segmento $\overline{AB}$, el plano tiene como vector normal al $\overrightarrow{AB}=(3,-2,-2)-(1,0,2)=(2,-2,-4)$. La ecuación del plano es $\pi: 2x-2y-4z+D=0$.

Como además pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Punto medio de $\overline{AB}=\dfrac{(1,0,2)+(3,-2,-2)}{2}=\dfrac{(4,-2,0)}{2}=(2,-1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-2y-4z+D=0\\ \text{Punto medio de } \overline{AB}=(2,-1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot 2-2\cdot(-1)-4\cdot 0+D=0\Rightarrow 4+2+D=0\Rightarrow D=-6$$

La ecuación del plano es $\pi: 2x-2y-4z-6=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-y-2z-3=0}$

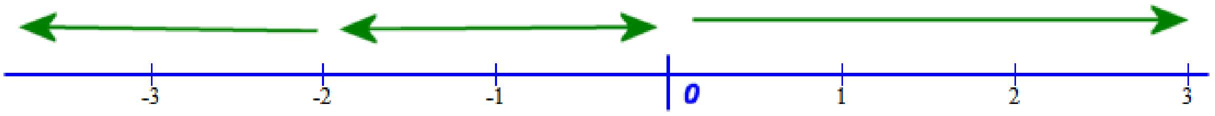
3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x)=x^2e^x$. **(2 puntos)**

Calculamos la derivada de $f(x)=x^2e^x \Rightarrow f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$

Si igualamos a cero la derivada obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=0\Rightarrow xe^x(2+x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 2+x=0\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

Hay dos momentos de cambio en la monotonía y tres zonas a estudiar su monotonía.



En $(-\infty,-2)$ tomamos el valor x = –4 y su derivada vale $f'(-4)=-4e^{-4}(2-4)=8e^{-4}>0$. La función crece en este intervalo.

En $(-2,0)$ tomamos el valor x = –1 y su derivada vale $f'(-1)=-e^{-1}(2-1)=-e^{-1}<0$. La función decrece en este intervalo.

En $(0,+\infty)$ tomamos el valor x = 1 y su derivada vale $f'(1)=e^1(2+1)=3e>0$. La función crece en este intervalo.

Resumiendo: La función $f(x)=x^2e^x$ crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$

4. Resuelve la integral **(2 puntos)**

$$\int\frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx$$

Para calcular la integral $\int\frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx$ descomponemos en fracciones simples la fracción.

$$x^2+2x-3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}x=\dfrac{-2+4}{2}=1\\ x=\dfrac{-2-4}{2}=-3\end{cases}$$

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}\Rightarrow\frac{5x+3}{x^2+2x-3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$5x+3=A(x+3)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow 8=4A\Rightarrow A=2\\ x=-3\Rightarrow -12=-4B\Rightarrow B=3\end{cases}$$

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+3}$$

$$\int\frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x+3}dx=\boxed{2\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C}$$

5. Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm? **(1 punto)**

b) ¿A partir de qué altura están el 33% de los habitantes más altos? **(1 punto)**

X = Estatura de un habitante de Extremadura. X = N(170, 10)

a)

$$P(170<X<185)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{170-170}{10}<\frac{X-170}{10}<\frac{185-170}{10}\right)=$$

$$=P(0<Z<1{,}5)=P(Z<1{,}5)-P(Z<0)=0{,}9332-0{,}5=0{,}4332$$

El porcentaje es del 43,32%

b) Buscamos el valor de “a” tal que $P(X>a)=0{,}33$

$$P(X>a)=0{,}33$$

$$1-P(X<a)=0{,}33$$

$$P(X<a)=0{,}66$$

Tipificamos

$$P\left(Z<\frac{a-170}{10}\right)=0{,}66$$

Buscando en la tabla

$$\frac{a-170}{10}=0{,}44$$

$$a=4{,}4+170=\boxed{174{,}4\ cm}$$