CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA
USC

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 20

XULLO 2019

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

3. Pídese:

a) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ e $C(8,1,m)$ estean aliñados.

c) Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1,2,1)$ e $Q(8,1,1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & m, \\ & & my & - & 2z & = & -2, \\ x & + & (m-1)y & + & (m+3)z & = & m. \end{array}\right.$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y, obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.

b) Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

3. Pídese:

a) Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r.

b) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razoa se A e B son ou non sucesos independentes.

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de $\frac{2}{3}$. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.02 cm.

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & m, \\ & & my & - & 2z & = & -2, \\ x & + & (m-1)y & + & (m+3)z & = & m. \end{array}\right.$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

3. Se pide:

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π^* que es perpendicular a π y contiene a r.

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$, y calcular el ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque gol desde el punto de penalti es $p = 0.7$. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

ABAU

CONVOCATORIA DE XULLO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

a) **0.75 puntos.**

b) **1.25 puntos.**

2)

a) **1 punto.**

b) **2 puntos:**

  i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.

  ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.

  iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

c) **1 punto.**

4)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

OPCIÓN B

1)

a) 1.25 puntos.

b) 0.75 puntos.

2)

a) 2 puntos.

b) 1 punto.

3)

a) 1.5 puntos.

b) 1.5 puntos.

4)

a) 0.75 puntos.

b) 1.25 puntos.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) $XA + B = C \Leftrightarrow XA = C - B \Leftrightarrow X = (C - B)A^{-1}$.

1.b) $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Posto que $\det A = 8 - 3 = 5$, tense

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (C - B)A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvase a idea seguinte: calcular $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ e μ tales que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

2.a) Nótese que $\mathrm{Dom}\, f = (0, \infty)$. Cómpre estudar o signo de

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1),$$

que coincide co signo de $2 \ln x + 1$ en $\mathrm{Dom}\, f$. Agora ben, $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$, xa que a función exponencial crece estritamente. Chegados a este punto, é obvio que $2 \ln x + 1 < 0$ se, e soamente se, $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$.

SIGNO DE f'.

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

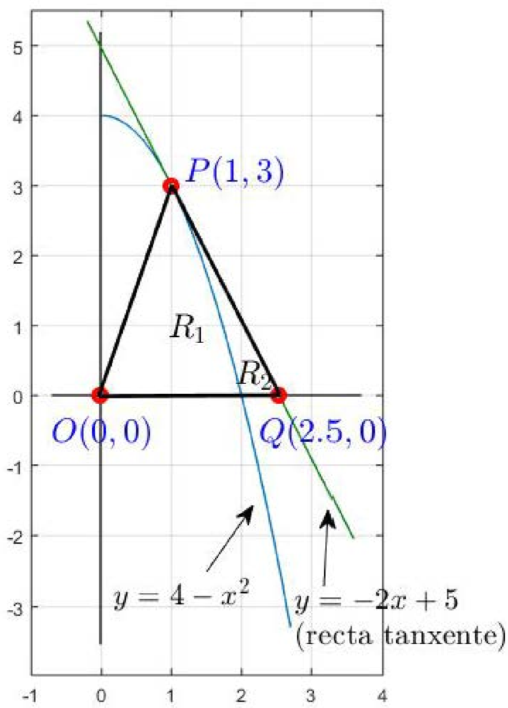
Polo tanto, f decrece estritamente no intervalo $\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ e crece estritamente no intervalo $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$. Posto que se trata dunha función continua, presenta un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Non hai outros extremos.

2.b) $y(x) = 4 - x^2 \Longrightarrow y'(x) = -2x \Longrightarrow y'(1) = -2$. Logo a ecuación da recta tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$ é

$$y(x) = -2(x-1) + 3 = -2x + 2 + 3 = -2x + 5.$$

O vértice pedido, ao que chamaremos Q, é o punto de corte desa recta co eixe X:

$$\left[-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5\right] \Rightarrow Q(2.5,0).$$



Á dereita móstrase o debuxo do triángulo, onde tamén están marcadas as rexións cuxas áreas hai que calcular: R_1 e R_2. É claro que a parábola corta ao eixe X positivo en $x = 2$ (xa que aí $4 - x^2 = 0$).

Posto que $R_1 = T \cup R^*$, con

- T un triángulo de base 1 e altura 3 e
- R^* a rexión baixo a gráfica de $y = 4 - x^2$ (e sobre o eixe X) desde $x = 1$ hasta $x = 2$,

a área de R_1 pódese calcular do seguinte xeito (u indicará "unidade de lonxitude"):

$\boxed{T \text{ e } R^* \text{ non se solapan}}$

$$\text{área}(R_1) = \text{área}(T) + \text{área}(R^*) = \frac{1 \cdot 3}{2} + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{3}{2} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$+ \left\{8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{3} = \frac{9 + 24 - 14}{6} = \frac{19}{6}\ \mathrm{u}^2 = 3.1\overline{6}\ \mathrm{u}^2.$$

Finalmente,

$$\text{área}(R_2) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} = \frac{45 - 38}{12} = \frac{7}{12}\ \mathrm{u}^2 = 0.58\overline{3}\ \mathrm{u}^2.$$

3. Pídese:

a) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ e $C(8,1,m)$ estean aliñados.

c) Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1,2,1)$ e $Q(8,1,1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Como $\vec{n}_{\pi_1}(1, m, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(m, 1, 1)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2,

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = 1,$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ademais, podemos engadir que non son coincidentes cando $m = 1$, xa que nese caso $P(0,0,-2) \in \pi_1 \setminus \pi_2$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right)$. Posto que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2$ non se anulan á vez, $\operatorname{rank} A^* = 2$ para calquera valor de m. Por outra banda, $\operatorname{rank} A = 1$ cando $m = 1$ (as dúas filas de A son iguais e non nulas) e $\operatorname{rank} A = 2$ cando $m \neq 1$, xa que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \neq 0$. Segundo esta análise:

- Se $m = 1$, $\operatorname{rank} A = 1 < \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) A, B e C son, para tódolos valores dos parámetros k e m, puntos distintos, que estarán polo tanto aliñados se, e soamente se, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Posto que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1-k \\ m-1 \end{pmatrix}$, tense que

$$A, B \text{ e } C \text{ están aliñados} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{8} = \frac{2-k}{1-k} \text{ e } m - 1 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow [-1 + k = 16 - 8k \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow [9k = 17 \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow \left[k = \frac{17}{9} \text{ e } m = 1\right].$$

3.c) $\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é vector director da recta r, a cal ademais pasa polo punto $P(-1,2,1)$, polo que as ecuacións paramétricas pedidas son

$$r: \begin{cases} x = -1 + 9\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1, \end{cases}$$

Chamemos π o plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$. Como $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(9, -1, 0)$ é un vector normal a π, tense $\pi: 9(x-1) - (y-1) = 0$. Tendo en conta que $9(x-1) - (y-1) = 9x - 9 - y + 1 = 9x - y - 8$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: 9x - y - 8 = 0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

MATEMÁTICAS II

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

Solución:

4.a) Damos nomes aos sucesos: R = "o mozo rega" e S = "a roseira sobrevive".

Sabemos que $P(R) = \frac{2}{3}$ (logo $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$), $P(S|R) = 0.7$ e $P(S|\bar{R}) = 0.2$.

Pídese $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R}\cap S)}{P(S)}$.

- De $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S\cap R)}{P(R)} = \frac{P(S\cap R)}{\frac{2}{3}}$, dedúcese que $P(S\cap R) = \frac{2}{3}\cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- De $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S\cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S\cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$, dedúcese que $P(S\cap \bar{R}) = \frac{1}{3}\cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$.

Polo tanto, $P(S) = P(S\cap R) + P(S\cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$ e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R}\cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

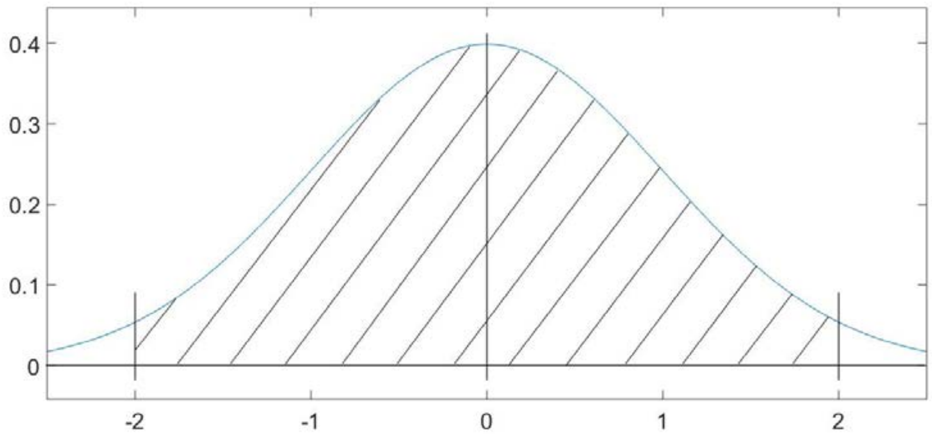
4.b) X = "grosor das pezas".

$$X \to N(8, 0.01) \Rightarrow Z = \frac{X-8}{0.01} \to N(0,1).$$

Logo

$$P(7.98 \le X \le 8.02) = P\left(\frac{7.98-8}{0.01} \le Z \le \frac{8.02-8}{0.01}\right) = P(-2 \le Z \le 2)$$
$$= P(Z \le 2) - P(Z < -2) = P(Z \le 2) - P(Z > 2)$$
$$= P(Z \le 2) - \{1 - P(Z \le 2)\} = 2P(Z \le 2) - 1 \approx 2\cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

é a probabilidade pedida.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-2 \le Z \le 2)$.

OPCIÓN A

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema:
$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & m & m & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & 0 & m+2 & 2 \end{array}\right)$$

polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ (m+2)z = 2. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z, seguindo co de y e terminando co de x. Sempre que $m \neq -2$, téñense que $z = \frac{2}{m+2}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 2z - 2 = \frac{4}{m+2} - 2 = \frac{-2m}{m+2}$, de onde se infire á súa vez que $y = \frac{-2}{m+2}$ cando, ademais de ser $m \neq -2$, é $m \neq 0$.

Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{2}{m+2}$, $y = \frac{-2}{m+2}$, $x = y - 3z + m = \frac{-2}{m+2} - \frac{6}{m+2} + m = \frac{-2-6+m(m+2)}{m+2} = \frac{m^2+2m-8}{m+2} = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2}$.
- Caso $m = -2$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 2$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é
$$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ -2z = -2, \\ 2z = 2, \end{cases}$$
de onde $z = 1$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = y - 3z = \lambda - 3$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, é seguro que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$.

MATEMÁTICAS II

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 3m + 2 - 3m + 2m - 2 =$
$m^2 + 2m = m(m+2)$,

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{-2,0\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas.
- Caso $m = -2$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 - 6 = -4 \neq 0$, tense $\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, tense $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 <$ n.º de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \lambda - 3, \\ y = \lambda, \\ z = 1, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 2$, a solución é $z = \frac{2}{m+2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-2}{m+2} = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2} = 0$. (Ver apartado 1.a).)

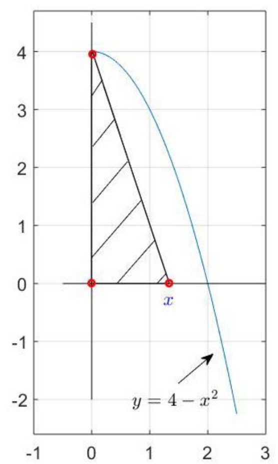
Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 2$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y, obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.

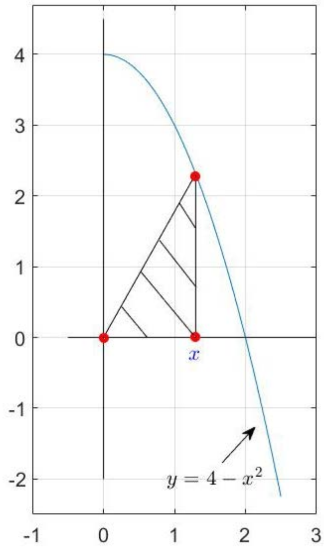
b) Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

Solución:



2.a) Se se entende que paralelo pode ser coincidente, non se pode descartar o caso no que o punto $P(0,4)$ é un vértice, co cal un dos catetos do triángulo está sobre o eixe Y. Teriamos unha situación como a que se representa no debuxo da dereita. Neste marco non hai triángulo de área máxima. En efecto, a área vén dada pola función $A(x) = \frac{4x}{2} = 2x$, con $x \in (0, \infty)$, que non ten máximo.

MATEMÁTICAS II



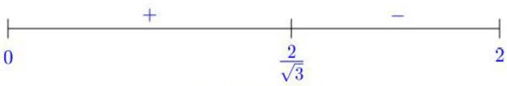
Supoñamos agora que ningún cateto pode estar sobre o eixe Y. Entón a situación anterior queda excluída e a única posibilidade é a representada no novo debuxo, á dereita, onde o triángulo ten base x e altura $4 - x^2$. Hai que buscar o máximo da función $A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2}$, con $x \in (0,2)$.

$$A'(x) = \frac{1}{2}\{4 - x^2 + x(-2x)\} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 4) = -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

onde $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \in (0,2)$. Logo A é crecente (A' ten signo positivo) no intervalo $\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e é decrecente (A' ten signo negativo) no intervalo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$. Posto que A é continua, conclúese que ten un único máximo absoluto en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



SIGNO DE A'.

Danse a continuación as medidas dos catetos e da hipotenusa do triángulo de área máxima (u indicará "unidade de lonxitude").

Catetos: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ u ≈ 1.1547 u e

$$y = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3} \text{ u} = 2.\overline{6} \text{ u}.$$

Hipotenusa: En virtude do teorema de Pitágoras, $h^2 = \frac{4}{3} + \frac{64}{9} = \frac{12+64}{9} = \frac{78}{9} = \frac{26}{3}$, polo que a medida da hipotenusa é

$$h = \sqrt{\frac{26}{3}} \text{ u} \approx 2.9439 \text{ u}.$$

2.b)

- Teorema de Bolzano: Sexa $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema de Rolle: Sexa $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b). Se $f(a) = f(b)$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

3. Pídese:

a) Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r.

b) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Punto de corte:

É útil escribir as ecuacións paramétricas de r, que son $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 - 2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 3\lambda, \end{cases}$

e substituír os valores de x, y e z na ecuación do plano para obter o valor do parámetro λ no punto de corte:

$$3(2+\lambda) + 2(-1-2\lambda) - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 6 + 3\lambda - 2 - 4\lambda - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

de onde $x = 2 + \lambda = 3,\ y = -1 - 2\lambda = -3$ e $z = 3\lambda = 3$. É dicir, o punto de corte pedido é $P(3, -3, 3)$.

Ecuación implícita de π^*:

$\vec{u} = \vec{n}_\pi(3,2,-1)$ e $\vec{v}(1,-2,3)$ son xeradores de π^*, e $P(2,-1,0) \in r \subset \pi^*$, polo que

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) - (y+1) - 6z - 2z - 2(x-2) - 9(y+1) = 4(x-2) - 10(y+1) - 8z = 4x - 8 - 10y - 10 - 8z = 4x - 10y - 8z - 18,$

a ecuación implícita pedida é $\pi^*: 4x - 10y - 8z - 18 = 0$ ou, equivalentemente,

$$\pi^*: 2x - 5y - 4z - 9 = 0.$$

3.b) $\vec{n}_{\pi_1}(2,-5,-4)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(1,0,0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e π_2, logo é claro que os dous planos se cortan nunha recta, porque $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$ non son paralelos.

O ángulo α que forman π_1 e π_2 coincide co ángulo que forman os vectores $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$, así que $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{\|\vec{n}_{\pi_1}\| \|\vec{n}_{\pi_2}\|}$. Téñense

- $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 2,$
- $\|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ e
- $\|\vec{n}_{\pi_2}\| = 1,$

de onde, en primeira instancia, $\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \approx 0.2981424$ e, en segunda,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) \approx 72.6539°.$$

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razoa se A e B son ou non sucesos independentes.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

Solución:

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8.$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6.$
- Da igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedúcese que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1.$
- Segundo unha das leis de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, de onde $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 01 = 0.9.$

Por último, os sucesos A e B non son independentes, porque $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

4.b) Se $X =$ "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón $X \to B(5{,}0.7)$, distribución binomial de parámetros $n = 5$ e $p = 0.7$. Tense entón $q = 1 - p = 0.3$ e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}.$
- Como $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$, tense que $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922.$
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807.$

Supoñamos agora que $X =$ "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal $X \to B(2100{,}0.7)$. Os valores de n, p e q neste caso son $n = 2100$, $p = 0.7$ e $q = 0.3$. A probabilidade $P(X \geq 1450)$ é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoar do xeito seguinte: ao ser $np = 1470 > 5$ e $nq = 630 > 5$, a variable X pode ser aproximada por unha normal $\tilde{X}$ de media np e desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$.

$$\tilde{X} \to N(1470{,}21) \Longrightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \to N(0{,}1),$$

de onde

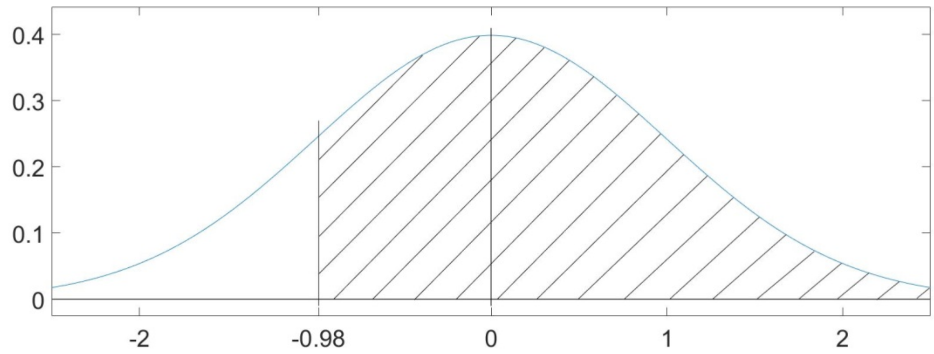
corrección de $\frac{1}{2}$ punto

$$P(X \geq 1450) \approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98)$$
$$= P(Z < 0.98) \approx 0.8365.$$

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(Z > -0.98)$.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

ABAU

CONVOCATORIA DE XULLO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

a) **0.75 puntos.**

b) **1.25 puntos.**

2)

a) **1 punto.**

b) **2 puntos:**

i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.

ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.

iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

c) **1 punto.**

4)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

OPCIÓN B

1)

- **a) 1.25 puntos.**
- **b) 0.75 puntos.**

2)

- **a) 2 puntos.**
- **b) 1 punto.**

3)

- **a) 1.5 puntos.**
- **b) 1.5 puntos.**

4)

- **a) 0.75 puntos.**
- **b) 1.25 puntos.**