Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
XULLO 2019

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.
   b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Da respuesta a los apartados siguientes:
a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x)=x^2 \ln x$
b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen O (0,0) y el punto P (1,3), uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en P (1,3) a la gráfica de la parábola $y=4-x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y=4-x^2$.

3. Se pide:
a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x+my+z+2=0$, $\pi_2 : mx+y+z+m=0$ en función de m.
b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos A(0,k,1), B(–1,2,1) y C(8,1,m) estén alineados.
c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos P(–1,2,1) y Q(8,1,1) y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto R(1,1,1).

4. Da respuesta a los apartados siguientes
a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega al rosal sobrevive con probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?
b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a. Discute, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema
   $$\begin{cases} x-y+3z=m \\ my-2z=-2 \\ x+(m-1)y+(m+3)z=m \end{cases}$$
   b. Resuélvelo si es posible en los casos *m=0* y *m=2*

2. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a. De entre todos los triángulo rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y=4-x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
   b. Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

3. Se pide:
   a. Para el plano $\pi: 3x+2y-z=0$ y la recta $r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{3}$, calcular el punto de corte de *r* con π y obtener la ecuación implícita del plano π´ que es perpendicular a π y contiene a *r*.
   b. Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x-5y-4z-9=0$ y $\pi_2: x=0$ y calcular el ángulo $\propto \in [0,90]$ que forman.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A)=0,2$ $P(B)=0,4$ y $P(A\cup B)=0,5$, Calcula $P(\overline{A}), P(\overline{B}), P(A\cap B), P(\overline{A}\cup\overline{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.
   b. La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es p=0,7. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.
   b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

a)

$$XA+B=C \Rightarrow XA=C-B \Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

b)

$XA+B=C \Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$, debemos calcular la inversa de A y C–B

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{t}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}}{8-3}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$C-B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Volvemos a la ecuación.

$$XA+B=C \Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4-3 & 1+2\\ 4+3 & -1-2\\ 4+3 & -1-2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 7 & -3\\ 7 & -3\end{pmatrix}$$

2. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x)=x^2\ln x$
   b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen O (0,0) y el punto P (1,3), uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en P (1,3) a la gráfica de la parábola $y=4-x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y=4-x^2$.

a)

Calculemos la derivada de $f(x)=x^2\ln x$.

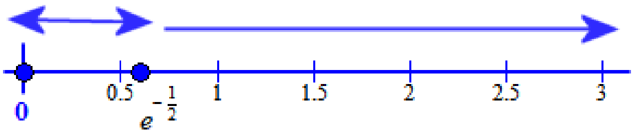
El dominio de la función es $(0,+\infty)$, ya que el logaritmo no existe para x < 0.

$$f(x)=x^2\ln x \Rightarrow f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=2x\ln x+x$$

Igualamos a cero la derivada

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 2x\ln x + x = 0 \Rightarrow x\left(2\ln x+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2\ln x+1=0 \Rightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=0,606 \end{cases}$$

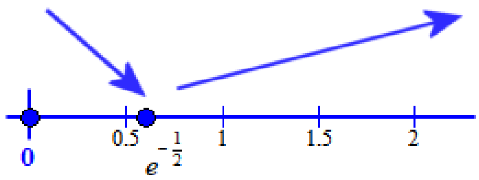
Hay dos puntos críticos x = 0 y x = 0,606. Estudiemos la variación del signo de la derivada. Como la función solo existe para los x > 0 solamente estudiamos que pasa de 0 a 0,606 y de 0,606 a +∞.



En $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ tomamos el valor 0,5 y la derivada vale

$f\,'(0,5)=2(0,5)\ln(0,5)+(0,5)=-0,1<0$ la función decrece.

En $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ tomamos el valor 1 y la derivada vale $f\,'(1)=2(1)\ln(1)+1=1>0$ la función crece.



La función presenta un mínimo local en $x=e^{-\frac{1}{2}}$.

La función decrece en $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y crece en $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

b)

La tangente a la curva $y=4-x^2$ en P(1,3) tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} y-3=f\,'(1)(x-1) \\ f(x)=4-x^2 \Rightarrow f\,'(x)=-2x \Rightarrow f\,'(1)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=-2(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-3=-2x+2 \Rightarrow y=-2x+5$$

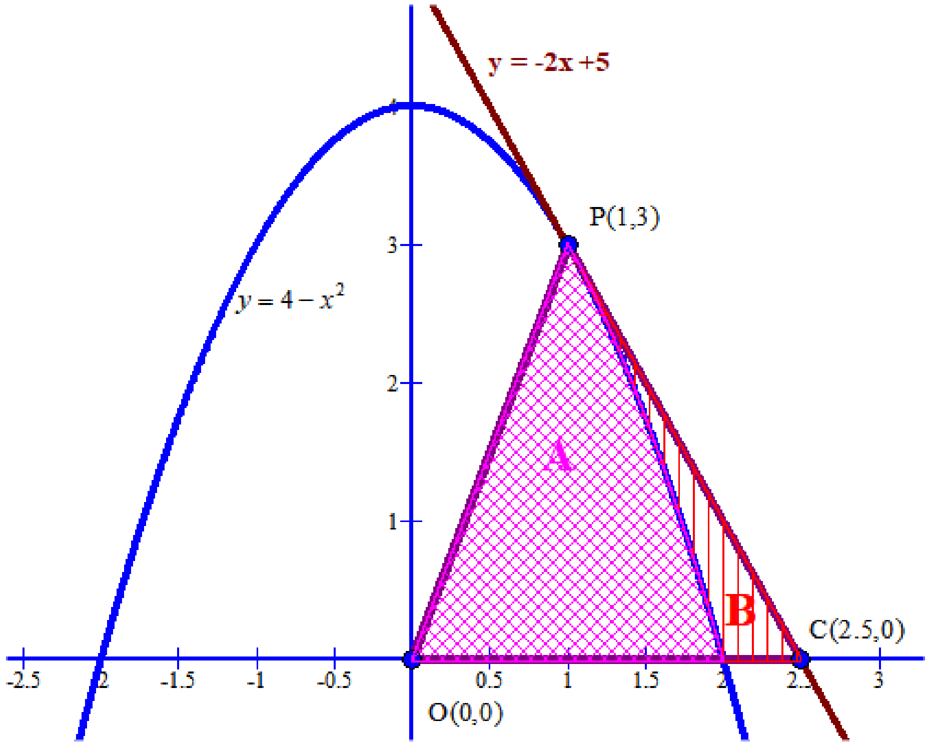
El tercer vértice debe ser el punto de corte de la tangente con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x+5 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2,5$$

El tercer vértice es C(2.5, 0).

Dibujando la gráfica de la parábola $y=4-x^2$ y de la recta tangente y marcando los tres vértices del triángulo, nos quedan las dos zonas A y B como en el dibujo. Recordar que la suma de ambas áreas es el área del triángulo OPC de base 2,5 y altura 3, es decir,

$$\text{Área del triángulo OPC} = \frac{2,5\cdot 3}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75\,u^2$$



El recinto B está limitado por la recta $y=-2x+5$, la parábola $y=4-x^2$ y el eje OX. El área se calcula con la integral definida de la diferencia de las funciones entre x =1 y x = 2 más la integral definida entre 2 y 2,5 de la recta tangente.

$$\text{Área de recinto B} = \int_1^2 -2x+5-\left(4-x^2\right)dx + \int_2^{2,5} -2x+5dx =$$

Calculamos por separado las integrales y luego sumamos los valores.

$$\int_1^2 -2x+5-4+x^2dx = \int_1^2 x^2-2x+1dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^2 =$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-2^2+2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-1^2+1\right]=\frac{7}{3}-2=0,333\,u^2$$

$$\int_2^{2,5} -2x+5dx = \left[-x^2+5x\right]_2^{2,5} = \left[-(2,5)^2+5(2,5)\right]-\left[-2^2+5\cdot 2\right]=0,25\,u^2$$

$$\text{Área de recinto B} = 0,333+0,25=0,583\,u^2$$

$$\text{Área del recinto A} = \text{Área del triángulo OPC} - \text{Área del recinto B} = 3,750-0,583=3,1667\,u^2$$

3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x+my+z+2=0$, $\pi_2 : mx+y+z+m=0$ en función de m.

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos A(0,k,1), B(–1,2,1) y C(8,1,m) estén alineados.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos P(–1,2,1) y Q(8,1,1) y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto R(1,1,1).

a)

Los vectores normales de los planos son $\vec{n_1}=(1,m,1)$ y $\vec{n_2}=(m,1,1)$.

Para que sean paralelos los planos sus vectores deben ser proporcionales:

$$\vec{n_1}//\vec{n_2} \Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{m}{1}=\frac{1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{1}=\frac{1}{1} \Rightarrow m=1 \\ \frac{1}{m}=\frac{1}{1} \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

Si $m=1$ los planos son paralelos o coincidentes.

Para que sean coincidentes debe cumplirse además que el punto P(0,0,–2) del plano $\pi_1: x+y+z+2=0$ esté en el plano $\pi_2: x+y+z+1=0 \Rightarrow -2+1=0$. Esto es imposible.

Para $m=1$ los planos son paralelos.

Si $m\neq 1$los planos son secantes.

b)

A(0,k,1), B(–1,2,1) y C(8,1,m) estén alineados cuando los vectores $\overrightarrow{BA}\ y\ \overrightarrow{BC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA}=(0,k,1)-(-1,2,1)=(1,\text{k}-2,0) \\ \overrightarrow{BC}=(-1,2,1)-(8,1,m)=(-9,1,1-m) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-9}=\frac{k-2}{1}=\frac{0}{1-m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{-9}=\frac{k-2}{1} \Rightarrow 1=-9k+18 \Rightarrow 9k=17 \Rightarrow \boxed{k=\frac{17}{9}} \\ \frac{1}{-9}=\frac{0}{1-m} \Rightarrow 1-m=0 \Rightarrow \boxed{m=1} \end{cases}$$

c)

Si la recta pasa por los puntos P(–1,2,1) y Q(8,1,1) su vector director es $\overrightarrow{PQ}=(8,1,1)-(-1,2,1)=(9,-1,0)$, entonces la ecuación de r es:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(9,-1,0) \\ \text{Pasa por Q(8,1,1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r\equiv \begin{cases} x=8+9t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}}$$

El plano perpendicular a r tiene como vector normal el director de la recta r $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(9,-1,0)$ y pasa por R(1,1,1).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(9,-1,0) \\ \text{Pasa por el punto R}(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi\equiv 9x-y+D=0 \\ \text{Pasa por el punto R}(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 9-1+D=0 \Rightarrow D=-8$$

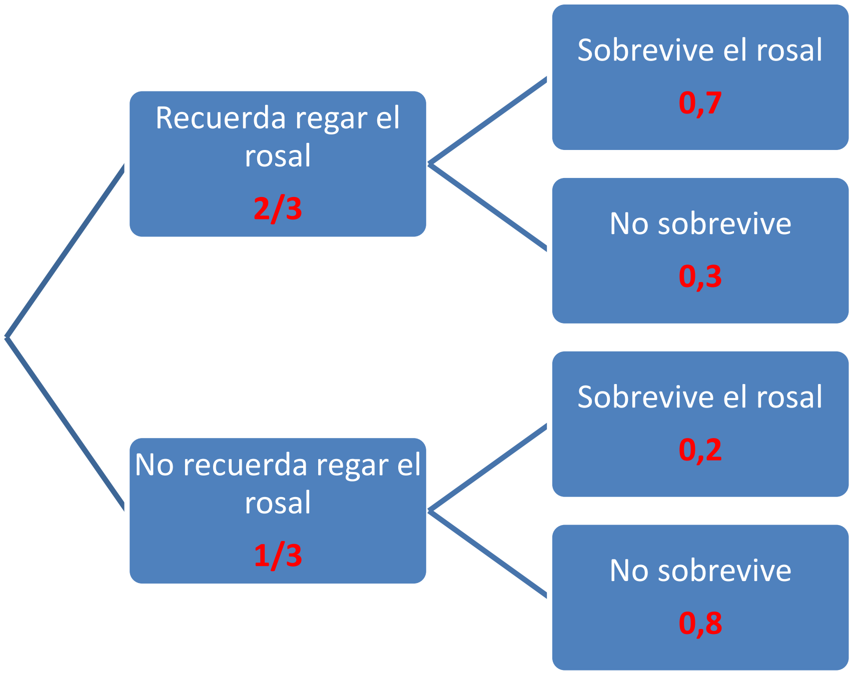
La ecuación del plano es $\boxed{\pi\equiv 9x-y-8=0}$

4. Da respuesta a los apartados siguientes

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega al rosal sobrevive con probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

a) Construyamos un diagrama de árbol para facilitar la comprensión de la situación planteada.



$$P(\text{No lo haya regado / Ha sobrevivido}) = \frac{P(\text{No lo riega y sobrevive})}{P(\text{Sobrevive})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,2}{\frac{2}{3}\cdot 0,7 + \frac{1}{3}\cdot 0,2} = \frac{0,2}{1,6} = 0,125$$

b)

X = Grosor de una pieza. X = N(8, 0,01).

$$P(7,98 < X < 8,021) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{7,98-8}{0,01} < \frac{X-8}{0,01} < \frac{8,021-8}{0,01}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 2,1) =$$

$$= P(Z < 2,1) - P(Z < -2) =$$

$$= P(Z < 2,1) - (1 - P(Z < 2)) =$$

$$= 0,9821 - 1 + 0,9772 = \boxed{0,9593}$$

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a. Discute, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema
   $$\begin{cases} x-y+3z=m \\ my-2z=-2 \\ x+(m-1)y+(m+3)z=m \end{cases}$$
   b. Resuélvelo si es posible en los casos *m=0* y *m=2*

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix}=m^2+3m+2-3m+2m-2=m^2+2m$$

Si igualamos a cero

$$|A|=0 \Rightarrow m^2+2m=0 \Rightarrow m(m+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m+2=0 \Rightarrow m=-2 \end{cases}$$

Hay tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 0$ y $m\neq -2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $m=0$

El sistema queda

$$\begin{cases} x-y+3z=0 \\ -2z=-2 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+3z=0 \\ z=1 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{1ª y 3ª ecuación son iguales} \\ \text{puedo quitar una de ellas} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+3=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-3 \\ y=y \\ z=1 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Es COMPATIBLE INDETERMINADO.

CASO 3. $m=-2$

El sistema queda

$$\begin{cases} x-y+3z=-2 \\ \quad -2y-2z=-2 \\ x-3y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª}} \\ x & -3y & +z & =-2 \\ -x & +y & -3z & =2 \\ \hline & -2y & -2z & =0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x-y+3z=-2 \\ \quad -2y-2z=-2 \\ \quad -2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ -2y \quad -2z \quad = 0 \\ \underline{2y \quad +2z \quad = 2} \\ \qquad\quad 0 \quad = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ \quad -2y - 2z = -2 \\ \qquad\quad 0 = 2 \end{cases}$$

Este sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución.

b) Para m = 0 está resuelto y su solución es $x = t - 3;\ y = t;\ z = 1$.

Para m = 2 el sistema tiene solución única, la hallamos con la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ y - z = -1 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases} \text{ y su matriz asociada es } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 - 3 + 1 = 4$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10 + 2 - 3 - 6 - 5 + 2}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-5 - 2 + 3 + 2}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2 + 1 - 2 + 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

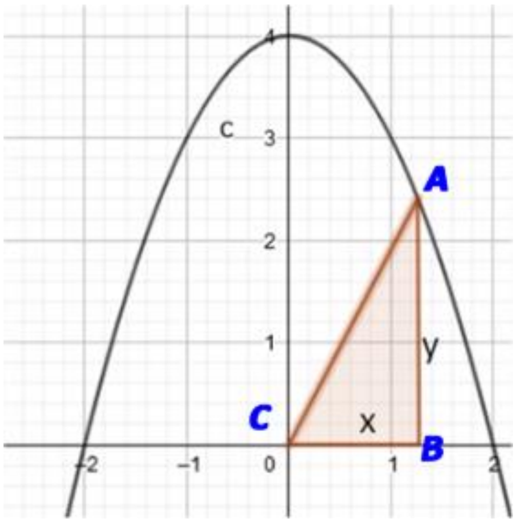
Para m = 2 la solución es x = 0; y = –1/2, z = 1/2.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. De entre todos los triángulo rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

Dibujemos la parábola y situamos el vértice en el origen y los catetos como se indica. La situación planteada queda

x	$y = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
2	0



El vértice A situado en la parábola tiene coordenadas $\left(x, 4-x^2\right)$. El vértice B tiene coordenadas $\left(x, 0\right)$ y el C(0,0).

El área del triángulo depende del valor x y su expresión es:

$$f(x)=\frac{x\left(4-x^2\right)}{2}=\frac{4x-x^3}{2}$$

Hallemos su máximo haciendo uso de la derivada.

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{2} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{4-3x^2}{2}$$

Igualamos a cero

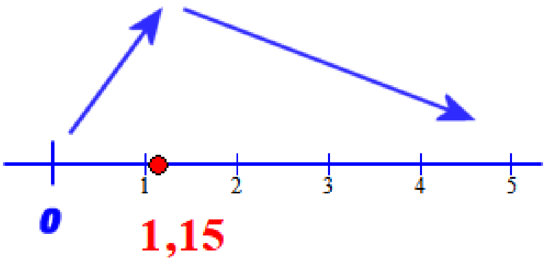
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{4-3x^2}{2}=0 \Rightarrow 4-3x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}15$$

Solo nos sirve el valor positivo de la raíz. Veamos el signo de la derivada antes y después de 1,15.

En $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos el valor x = 1 y la derivada vale $f\,'(1)=\frac{4-3\cdot 1^2}{2}=\frac{1}{2}>0$

La función crece en $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

En $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$ tomamos el valor x = 2 y la derivada vale $f\,'(2)=\frac{4-3\cdot 2^2}{2}=\frac{-8}{2}=-4<0$ La función decrece en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$



El área alcanza un valor máximo en $x=\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}15$. Los catetos son $x=\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}15$

$y = 4 - x^2 = 4 - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ y la hipotenusa

$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{76}{9}} = \frac{\sqrt{76}}{3}$.

Resumiendo los catetos son $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$; $y = \frac{8}{3}$. La hipotenusa es $\frac{\sqrt{76}}{3}$

3. Se pide:

a. Para el plano $\pi : 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de *r* con π y obtener la ecuación implícita del plano π´ que es perpendicular a π y contiene a *r*.

b. Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2 : x = 0$ y calcular el ángulo ∝ ∈ [0,90] que forman.

a. Resolvamos el sistema planteado por plano y recta, pasando a la ecuación paramétrica la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 3x + 2y - z = 0 \\ r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(2+t) + 2(-1-2t) - 3t = 0 \Rightarrow 6 + 3t - 2 - 4t - 3t = 0 \Rightarrow -4t = -4$$

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = -1 - 2t = -1 - 2 = -3 \\ z = 3t = 3 \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es P(3,–3,3)

El plano π´ al ser perpendicular a π, tiene al vector normal de π como vector director del nuevo plano π´. Al contener a la recta el vector director de la recta también lo es del plano π´ y además contiene al punto Q(2,–1,0) de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (3,2,-1) \\ \vec{v} = (1,-2,3) \\ \text{Pasa por } Q(2,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 12 - y - 1 - 6z - 2z - 9y - 9 - 2x + 4 = 0$$

$$4x - 10y - 8z - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 5y - 4z - 9 = 0}$$

b. Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (2,-5,-4)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,0,0)$.

¿Son proporcionales los vectores?

¿$\frac{2}{1} = \frac{-5}{0} = \frac{-4}{0}$? No es cierto, luego los planos no son paralelos ni coincidentes y por lo tanto son secantes y definen una recta.

Para determinar el ángulo que forman hallamos el ángulo que forman sus vectores normales usando el producto escalar de dichos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=(2,-5,-4)(1,0,0)=2 \\ \left|\vec{n_1}\right|=\sqrt{4+25+16}=\sqrt{45} \\ \left|\vec{n_2}\right|=\sqrt{1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|\cdot\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right) \Rightarrow 2=\sqrt{45}\cdot\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)$$

$$\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\frac{2}{\sqrt{45}} \Rightarrow \left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{45}}\right)=\boxed{72,65^{\circ}}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A)=0,2$ $P(B)=0,4$ y $P(A\cup B)=0,5$, Calcula $P(\overline{A}), P(\overline{B}), P(A\cap B), P(\overline{A}\cup\overline{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.
   b. La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es p=0,7. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

a.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,2=0,8$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,4=0,6$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0,5=0,2+0,4-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=0,2+0,4-0,5=0,1$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0,1=0,9$$

A y B son independientes si se cumple $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$P(A\cap B)=0,1$$

$$P(A)P(B)=0,2\cdot 0,4=0,08$$

Como no son iguales, no son independientes los sucesos A y B

b. Si llamemos X = número de goles en 5 intentos. Se trata de una binomial de parámetros p = 0,7 y n = 5.

$$P(\text{No marque ningun gol})=P(X=0)=\binom{5}{0}0,7^0\cdot 0,3^5=0,3^5=\boxed{0,00243}$$

$$P(\text{Marque por lo menos dos goles})=P(X\geq 2)=$$

$$=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=\binom{5}{2}0,7^2\cdot 0,3^3+\binom{5}{3}0,7^3\cdot 0,3^2+\binom{5}{4}0,7^4\cdot 0,3^1+\binom{5}{5}0,7^5\cdot 0,3^0=$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} 0,7^3 \cdot 0,3^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0,7^4 \cdot 0,3 + 0,7^5 =$$

$$= 10 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 + 10 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^2 + 5 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 + 0,7^5 = \boxed{0,96922}$$

$$P(\text{Marque cinco goles}) = P(X = 5) = \binom{5}{5} 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,7^5 = \boxed{0,16807}$$