CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
XUÑO 2019

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que A + I es invertible despeja X en la ecuación $A - X = AX$

b. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A - X = AX$.

2. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b. Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que *f* sea continua y que valores deben tener para que *f* sea derivable.

c. Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta x = 4 y la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \dfrac{x}{e} & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$$

3. Se pide:

a. Calcular el ángulo del intervalo [0º, 90º] que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$

b. Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1,–3,0) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

c. Calcula la distancia del punto Q(1,1,1) al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b. Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3-m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$

b. Resuélvelo, si es posible, en los casos m = 0 y m = 4.

2. Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

a. Calcular los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b. Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c. Calcular $\int f(x)dx$.

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

b. Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0,0,0), B(1,0,1) y C(0,1,0).

c. Calcula el punto simétrico del punto P(1,2,3) con respecto al plano $\pi : -x + z = 0$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula P(A) si P(B) = 0.8, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de P(A).

b. En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que A + I es invertible despeja X en la ecuación $A - X = AX$

b. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A - X = AX$.

a. $A - X = AX \Rightarrow A = AX + X \Rightarrow A = (A+I)X$

Como A + I es invertible, existe $(A+I)^{-1}$ y se cumple:

$$A = (A+I)X \Rightarrow (A+I)^{-1} A = (A+I)^{-1}(A+I)X \Rightarrow (A+I)^{-1} A = I \cdot X = X$$

$$\boxed{X = (A+I)^{-1} A}$$

b. Si $A - X = AX$ entonces $X = (A+I)^{-1} A$. Para hallar X utilizando esta igualdad necesitamos obtener $(A+I)^{-1}$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{La matriz } A+I \text{ es invertible.}$$

$$(A+I)^{-1} = \frac{Adj(A+I)^T}{|A+I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}{5} = \frac{\begin{pmatrix} +4 & -(-1) \\ -1 & +1 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$X = (A+I)^{-1} A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0+1 & -4+3 \\ 0+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b. Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que *f* sea continua y que valores deben tener para que *f* sea derivable.

c. Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta x = 4 y la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \dfrac{x}{e} & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$$

a. Integrando por partes:

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \to \text{du}=\frac{1}{x}dx \\ dv = dx \to v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x = x(\ln x - 1) + C$$

Derivando:

$$F(x) = x(\ln x - 1) + C \to F'(x) = 1\cdot(\ln x - 1) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

b. Si la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0,e] \\ ax+b & si \quad x \in (e,\infty) \end{cases}$ es continua debe cumplirse que:

- $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} (ax+b) = a\cdot e + b$
- $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} (\ln x) = \ln e = 1$
- Existe f(e) = lne = 1
- Los tres valores son iguales → $a\cdot e + b = 1$

  Para que la función sea ***continua*** los parámetros a y b deben cumplir $\boxed{a \cdot e + b = 1}$

La función $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0,e] \\ ax+b & si \quad x \in (e,\infty) \end{cases}$ es derivable en los valores distintos de x = e y su derivada es $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \in (0,e) \\ a & si \quad x \in (e,\infty) \end{cases}$.

También debe serlo en x = e y debe cumplirse que:

$f'(e^+) = f'(e^-) \Rightarrow \frac{1}{e} = a \Rightarrow a = \frac{1}{e}$ y como debe ser continua, se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} a\cdot e + b = 1 \\ a = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{e}\cdot\text{e} + b = 1 \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

Para que la función sea ***derivable*** los parámetros a y b deben cumplir $\boxed{b = 0}$ y $\boxed{a = \frac{1}{e}}$

c. Averigüemos los puntos de corte con el eje X de la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0,e] \\ \frac{x}{e} & si \quad x \in (e,\infty) \end{cases}$$

- Lnx = 0 → x = 1 que pertenece al intervalo (0, e]
- $\frac{x}{e} = 0 \Rightarrow x = 0$ que no pertenece al intervalo (e,∞)

Por lo que el área pedida es la integral definida entre 1 y 4 de la función *f(x)*, como en ese intervalo está incluido el valor x = e, separamos la integral definida en dos:

$$Área=\left|\int_1^e f(x)\,\mathrm{dx}\right|+\left|\int_e^4 f(x)dx\right|=\left|\int_1^e \ln x\mathrm{dx}\right|+\left|\int_e^4 \frac{x}{e}dx\right|=\left|\left[x(\ln x-1)\right]_1^e\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2e}\right]_e^4\right|=$$

$$=\left|\left(e(\ln e-1)\right)-\left(1\cdot(\ln 1-1)\right)\right|+\left|\left(\frac{4^2}{2e}\right)-\left(\frac{e^2}{2e}\right)\right|=1+\left|\frac{16-e^2}{2e}\right|=1+\left|\frac{16}{2e}-\frac{e^2}{2e}\right|=\boxed{1+\frac{8}{e}-\frac{e}{2}u^2=2{,}58\,u^2}$$

3. Se pide:

a. Calcular el ángulo del intervalo [0º, 90º] que forman los vectores $\vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

b. Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1,–3,0) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$

c. Calcula la distancia del punto Q(1,1,1) al plano $\pi:-x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

a. Calculamos el producto escalar de los vectores:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+0=\frac{1-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}$$

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1+2-2\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{1+3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{4}}=1$$

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\text{arc cos}\frac{1}{2}=\begin{cases} 60^\circ \\ 300^\circ \\ 60^\circ+360^\circ \\ 300^\circ+360^\circ \\ \ldots. \end{cases}$$

El ángulo pedido es 60º

b. El plano pedido es perpendicular a la recta, por lo que tiene como vector normal el director de dicha recta. Averigüemos dicho vector director haciendo el producto vectorial de los normales de los planos que la definen:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + k - (-j + 2i) = -i + j + k = (-1,1,1)$$

El plano pedido tiene vector normal $\vec{n} = (-1,1,1)$ y su ecuación es

$\pi : -x + y + z + D = 0$, como además pasa por el punto P(1,–3,0), debe cumplirse:

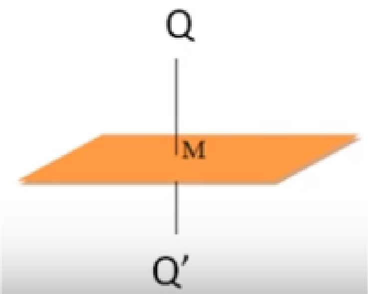
–1 – 3 + 0 + D = 0 → D = 4

El plano es $\boxed{\pi : -x + y + z + 4 = 0}$

c. Utilicemos la fórmula de la distancia:

$$d(Q,\pi) = \left| \frac{-1+1+1+4}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{3}}\, u$$

Llamemos Q´ al simétrico de Q(1,1,1) respecto del plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$.



Y llamamos M al punto de corte del plano π con la recta que contiene a Q y Q´.

Esta recta tiene como vector director el normal del plano $\vec{v_r} = (-1,1,1)$ y pasa por

Q(1,1,1), por lo que su ecuación es $r : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

El punto M está en la recta, luego M($1-\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha$)

El punto M está en el plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$, luego se cumple:

$$-(1-\alpha) + (1+\alpha) + (1+\alpha) + 4 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{3}$$

El punto M tiene coordenadas $M\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

Como M es el punto medio del segmento QQ´ entonces:

$$M = \frac{Q + Q'}{2} \Rightarrow 2M = Q + Q' \Rightarrow 2M - Q = Q'$$

$$Q' = 2\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{16}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{13}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3}\right)$$

$$\boxed{Q' = \left(\frac{13}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3}\right)}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b. Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

a. Construyamos una tabla de contingencia que nos aclare la situación:

	Tiene rosas	**No tiene rosas**	
Tiene camelias	**21 %**		**40 %**
No tiene camelias			
	35 %		**100 %**

Completando la tabla:

	Tiene rosas	**No tiene rosas**	
Tiene camelias	**21 %**	**19 %**	**40 %**
No tiene camelias	**14%**	**46 %**	**60 %**
	35 %	**65%**	**100 %**

Calculemos las probabilidades pedidas usando la información de la tabla:
P(Tenga camelias o rosas) = 21 + 19 +14 = 54 % = 0,54
P(No tenga ni camelias ni rosas) = 46 % = 0,46

P(Tenga camelias, sabiendo que tiene rosas) = $\frac{21}{35} = 0,6$

P(Tenga rosas, sabiendo que tiene camelias) = $\frac{21}{40} = 0,525$

P(Solamente tenga rosas o solamente tenga camelias) = P(Tiene rosas y no camelias) + P(Tiene camelias y no rosas) = 14 + 19 =33 % = 0,33

b.

Llamemos X a la variable aleatoria que cuenta el número de personas nacidas en enero.
X=”Número de personas nacidas en enero”

Esta variable es binomial con probabilidad $p = \frac{31}{365}$ y $q = \frac{334}{365}$, suponiendo igual de probable nacer en cualquier día del año.
Y como se hacen sobre 50 personas → n = 50

X = B(50, 31/365)

Calculemos la probabilidad del suceso contrario, la probabilidad de que nadie o 1 persona haya nacido en el mes de enero.

$$P(X=0)+P(X=1)=\binom{50}{0}\cdot\left(\frac{334}{365}\right)^{50}\cdot\left(\frac{31}{365}\right)^{0}+\binom{50}{1}\cdot\left(\frac{3341}{365}\right)^{49}\cdot\left(\frac{31}{365}\right)^{1}=$$

$$=\left(\frac{334}{365}\right)^{50}+50\cdot\left(\frac{3341}{365}\right)^{49}\cdot\left(\frac{31}{365}\right)=0,0118+0,0548=0,0666$$

La probabilidad pedida es:

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-0,0666=\boxed{0,9334}$$

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$

b. Resuélvelo, si es posible, en los casos m = 0 y m = 4.

a. La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}=2m^2-2(3-m)+0-(6m+0-2(3-m))=2m^2-6m$$

Si igualamos a cero:

$$2m^2-6m=0 \Rightarrow 2m(m-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases}$$

Distinguiremos tres casos diferentes:

CASO 1. $m \neq 0; \quad m \neq 3$

El rango de la matriz A es 3 al igual que el de la ampliada e igual al número de incógnitas.

En este caso el sistema tiene solución única (**Sistema Compatible Determinado**)

CASO 2. $m=0$

El sistema quedaría:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

Que se puede resolver:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \\ 2x-y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ \boxed{z=-2} \\ 2x-y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3(-2)=0 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y-6=0 \\ 2x-y=6 \end{cases} \Rightarrow 2x-y=6 \Rightarrow \boxed{y=2x-6}$$

El sistema tiene infinitas soluciones:

$\begin{cases} x=x \\ y=2x-6 \\ z=-2 \end{cases}$ Es un **sistema compatible indeterminado**

CASO 3. $m=3$

El sistema quedaría:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 3y=-6 \\ 2x-y+3z=6 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, ya que la primera y la tercera ecuación no se pueden cumplir al mismo tiempo. **Sistema Incompatible**

b. La solución para m = 0 es $\begin{cases} x=x \\ y=2x-6 \\ z=-2 \end{cases}$ resuelto en el anterior apartado

La solución para m = 4 entra dentro del caso 1 y por tanto la solución es única.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ \quad 4y-z=-6 \\ 2x-y+4z=6 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \ - \ \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \quad 2x-y+3z=0 \\ -2x+y-4z=-6 \\ \hline \qquad\quad -z=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ \quad 4y-z=-6 \\ \quad -z=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+18=0 \\ 4y-6=-6 \\ z=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y+18=0 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+18=0 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-18 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-9 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases}}$$

2. Considérese la función $f(x)=x^2e^{-x}$, se pide:

a. Calcular los límites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b. Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c. Calcular $\int f(x)dx$.

a.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

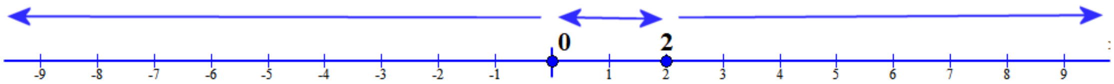
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\infty\cdot e^{+\infty}=\infty\cdot\infty=+\infty$$

b. Para determinar crecimiento, decrecimiento y extremos necesitamos calcular su derivada e igualarla a 0.

$$f(x)=x^2e^{-x} \Rightarrow f\,'(x)=2xe^{-x}+x^2\left(-e^{-x}\right)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}\left(2-x\right)$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow xe^{-x}\left(2-x\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ e^{-x}=0;\ \text{No tiene solución} \\ 2-x=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

Al existir dos valores críticos x = 0 y x = 2 la recta real se divide en tres partes:



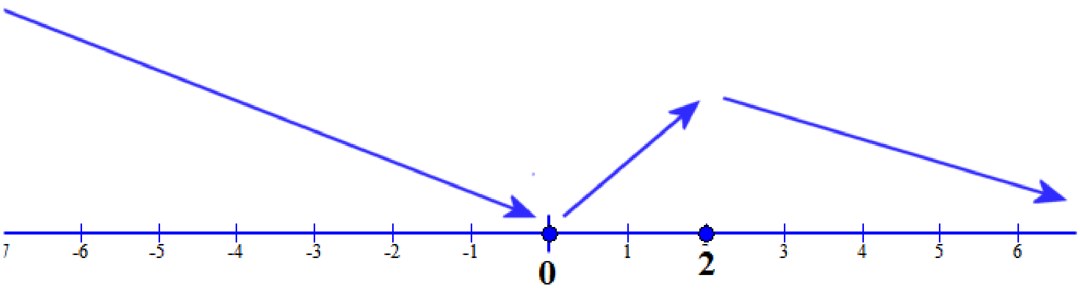
Estudiemos el signo de la derivada en cada semirrecta e intervalo:

En $\left(-\infty,0\right)$ elegimos x = –2 y $f\,'(-2)=-2\cdot e^{2}\left(2+2\right)<0$. La función decrece.

En $\left(0,2\right)$ elegimos x = 1 y $f\,'(1)=1\cdot e^{-1}\left(2-1\right)>0$. La función crece.

En $\left(2,+\infty\right)$ elegimos x = 3 y $f\,'(3)=3\cdot e^{-3}\left(2-3\right)<0$. La función decrece.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento serían:



Podemos decir que:

La función crece en el intervalo $\left(0,2\right)$ y decrece en $\left(-\infty,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en x = 0 y un máximo relativo en x = 2.

Para averiguar el punto de inflexión, que se intuye que está en el intervalo (0, 2) utilizamos la segunda derivada:

$$f\,'(x)=xe^{-x}\left(2-x\right)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}\Rightarrow f\,''(x)=2e^{-x}+2x\left(-e^{-x}\right)-\left(2xe^{-x}+x^2\left(-e^{-x}\right)\right)$$

$$f\,''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}=2e^{-x}-4xe^{-x}+x^2e^{-x}=e^{-x}\left(2-4x+x^2\right)$$

Igualamos a cero la segunda derivada:

$$f\,''(x)=0\Rightarrow e^{-x}\left(2-4x+x^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}e^{-x}=0;\ \text{No tiene solución}\\ 2-4x+x^2=0\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot2}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\begin{cases}\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}=3{,}41\\ \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}=0{,}58\end{cases}\end{cases}$$

x = 0,58 y x = 3,41 son candidatos a puntos de inflexión de la función. Comprobemos el signo de la derivada segunda antes de 0,58, entre 0,58 y 3,41 y después de 3,41.

En $\left(-\infty,0{,}58\right)$ elegimos x = –2 y $f\,''(-2)=e^{2}\left(2+8+4\right)>0$. La función es convexa.

En $\left(0{,}58,3{,}41\right)$ elegimos x = 1 y $f\,''(1)=e^{-1}\left(2-4+1\right)<0$. La función es cóncava.

En $\left(3{,}41,+\infty\right)$ elegimos x = 4 y $f\,''(4)=e^{-4}\left(2-16+16\right)>0$. La función es convexa.

x = 0,58 y x = 3,41 son puntos de inflexión de la función

c.

$$\int f(x)dx=\int x^2e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ x^2=u\rightarrow 2xdx=du\\ e^{-x}dx=dv\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=x^2\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}2xdx=$$

$$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ x=u\rightarrow dx=du\\ e^{-x}dx=dv\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=-x^2e^{-x}+2\left(x\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}dx\right)=$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx=\boxed{-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C}$$

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx-y+2=0$ y $\pi_2: 2x+3y=0$ en función del parámetro m.

b. Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0,0,0), B(1,0,1) y C(0,1,0).

c. Calcula el punto simétrico del punto P(1,2,3) con respecto al plano $\pi: -x+z=0$

a. Su posición relativa depende, en gran parte de sus vectores normales. Veamos si son proporcionales (planos paralelos o coincidentes)

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1: mx-y+2=0\\ \pi_2: 2x+3y=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1}=(m,-1,0)\\ \overrightarrow{n_2}=(2,3,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{-1}{3}=\frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{m}{2}=\dfrac{-1}{3} \Rightarrow m=\dfrac{-2}{3}\\ \dfrac{-1}{3}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow 0=0\end{cases}$$

Hay dos casos diferentes:

CASO 1. $m \neq \frac{-2}{3}$. En este caso los vectores no son proporcionales y por tanto los planos no son ni coincidentes ni paralelos, es decir, se cortan.

CASO 2. $m = \frac{-2}{3}$. En este caso los vectores normales son proporcionales y por tanto los planos o son coincidentes o paralelos.

Nuestros planos quedarían con ecuaciones: $\pi_1: \frac{-2}{3}x-y+2=0$ y $\pi_2: 2x+3y=0$.

Cambiando el signo y quitando denominadores en la ecuación del primer plano: $\pi_1: 2x+3y-6=0$ y $\pi_2: 2x+3y=0$. Estos planos son paralelos, pues tienen vectores normales proporcionales y la constante es distinta ($-6 \neq 0$).

b. La ecuación implícita del plano que pasa por 3 puntos se obtiene a partir de uno de esos puntos y dos vectores que unan dichos puntos:

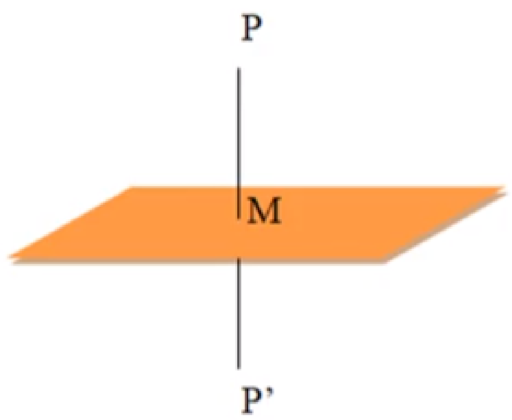
$$\left.\begin{array}{l}A(0,0,0)\\ B(1,0,1)\\ C(0,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A(0,0,0)\\ \overrightarrow{AB}=(1,0,1)-(0,0,0)=(1,0,1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,0)-(0,0,0)=(0,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$\pi: 0+0+z-(0+0+x)=0$

$\pi: z-x=0$

$\boxed{\pi: x-z=0}$

c. Si llamamos P´ al punto simétrico de P la situación es la del dibujo:



Hallemos las coordenadas del punto M.

M(a, b, c) pertenece al plano $\pi: -x+z=0$ → –a + c = 0 →a = c

El punto tiene coordenadas M(a, b, a) y los vectores $\vec{n}=(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{PM}$ son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=(a,b,a)-(1,2,3)=(a-1,b-2,a-3)\\ \vec{n}=(-1,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-1}{-1}=\frac{b-2}{0}=\frac{a-3}{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a-1}{-1}=\frac{b-2}{0}\\ \frac{a-1}{-1}=\frac{a-3}{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(a-1)0=(b-2)(-1)\\ a-1=(a-3)(-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}0=-b+2\\ a-1=-a+3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=2\\ 2a=4\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=2\\ a=2\end{array}\right\}$$

El punto M tiene coordenadas M(2, 2, 2).

Como M es el punto medio del segmento PP´ tenemos que:

$$\frac{P+P'}{2}=M \Rightarrow P+P'=2M \Rightarrow P'=2M-P=2(2,2,2)-(1,2,3)=(3,2,1)$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano $\pi: -x+z=0$ es P´(3,2,1)

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula P(A) si P(B) = 0.8, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de P(A).

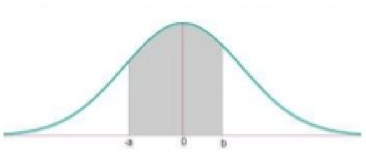
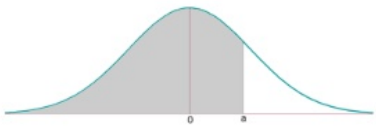
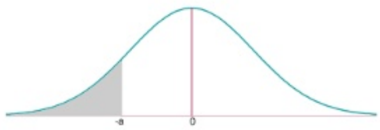
b. En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

a.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$3\text{P(A)}=\text{P(A)}+0.8-0.2$$
$$3\text{P(A)}-\text{P(A)}=0.8-0.2$$
$$2P(A)=0.6$$
$$\boxed{P(A)=\frac{0.6}{2}=0.3}$$

b. X = N(25, 4)

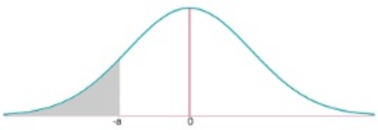
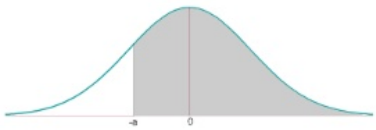
$$P(21<X<27.2)=P(X<27.2)-P(X<21)=$$

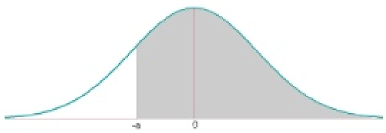
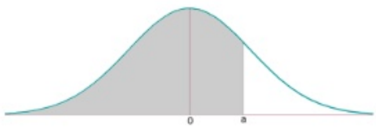
 =  − 

Tipificamos la variable:

$$P(X<27.2)-P(X<21)=P\left(\frac{X-25}{4}<\frac{27.2-25}{4}\right)-P\left(\frac{X-25}{4}<\frac{21-25}{4}\right)=$$

$$=P(Z<0,55)-P(Z<-1)=$$

Como  = 1 – 

Y  = 

$$=P(Z<0,55)-\left(1-P(Z<1)\right)=$$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) y queda:

$$P(21<X<27.2)=0.7088-(1-0.8413)=0.5501$$

0.5501 es la probabilidad de que un día el rango de temperaturas sea el indicado. ¿Cuantos días de un mes de 31 días va a pasar esto?

$$0.5501\cdot 31=17.0531$$

Aproximadamente 17 días.