UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}, \qquad \pi \equiv ax+y+z-b=0$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

2.- (2 puntos) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 96.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

3.- (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ -x^2+ax+b, & x>0 \end{cases}$$

con *a* y *b* números reales.

(I) Halla *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en $x=0$.

(II) Para los valores anteriores de *a* y *b* analiza si *f* tiene un extremo relativo en $x=0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.
(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x+y-z-3=0$ y la recta $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto P=(1,2,–1), es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

2.- (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale 1,2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

3.- (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ -x^2+ax+b, & x>0 \end{cases}$$

con *a* y *b* números reales.

(I) Halla *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en $x=0$.

(II) Para los valores anteriores de *a* y *b* analiza si *f* tiene un extremo relativo en $x=0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases}2x+2y+2z=2\\ -x-2y+z=0\end{cases}, \qquad \pi\equiv ax+y+z-b=0$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

(I) El vector normal del plano π es $\vec{n}=(a,1,1)$. Hallemos el vector director de la recta y un punto de la misma.

Resolvemos el sistema de la ecuación de la recta r.

$$r:\begin{cases}x+y+z=1\\ -x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Sumo la 1ª y 2ª ecuación}\\ \text{y el resultado sustituye la}\\ \text{2ª ecuación}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\ -y+2z=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{y=2z-1}$$

$$\Rightarrow x+2z-1+z=1\Rightarrow\boxed{x=-3z+2}$$

La recta r tiene ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases}x=2-3t\\ y=-1+2t\\ z=t\end{cases}$$

El vector director de la recta r es $\vec{v}=(-3,2,1)$ y pasa por el punto P(2,–1,0).

Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse que el punto P esté en el plano y el vector $\vec{v}=(-3,2,1)$ y $\vec{n}=(a,1,1)$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{matrix}P(2,-1,0)\in\pi\equiv ax+y+z-b=0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}=(a,1,1)(-3,2,1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a-1+0-b=0\\ -3a+2+1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a-b=1\\ -3a=-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{a=1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-b=1\Rightarrow\boxed{b=1}$$

Para que la recta esté contenida en el plano deben ser a = b = 1.

(II) El vector normal del plano π es $\vec{n}=(a,1,1)$. El vector director de la recta r es $\vec{v}=(-3,2,1)$ y pasa por el punto P(2,–1,0).

Para que sean paralelas deben ser vector normal y director perpendiculares y el punto P no debe pertenecer al plano.

$$\left.\begin{matrix}P(2,-1,0)\notin\pi\equiv ax+y+z-b=0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}=(a,1,1)(-3,2,1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a-1+0-b\neq0\\ -3a+2+1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a-b\neq1\\ -3a=-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{a=1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-b\neq1\Rightarrow\boxed{b\neq1}$$

Para que recta y plano sean paralelos debe ser a = 1 y b distinto de 1.

2.- (2 puntos) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.
(II) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 96.
(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

X = Número de rapes capturados. X = N(220, σ).

(I)

$$P(X>250)=0{,}1587$$

$$1-P(x<250)=0{,}1587$$

$$P(X<250)=0{,}8413$$

Tipificamos

$$P\left(\frac{X-220}{\sigma}<\frac{250-220}{\sigma}\right)=0{,}8413$$

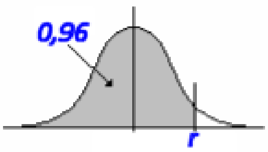
$$P\left(Z<\frac{30}{\sigma}\right)=0{,}8413$$

Buscando en la tabla

$$\frac{30}{\sigma}=1\Rightarrow \boxed{\sigma=30}$$

(II)

Nos piden encontrar la marca que deja al 96 % de los pescadores por debajo.



$$P(X<r)=0{,}96$$

Tipificamos

$$P\left(\frac{X-220}{30}<\frac{r-220}{30}\right)=0{,}96$$

$$P\left(Z<\frac{r-220}{30}\right)=0{,}96$$

Buscamos en la tabla

$$\frac{r-220}{30}=\frac{1{,}75+1{,}76}{2}\Rightarrow 2r-440=105{,}3\Rightarrow r=\frac{545{,}3}{2}=272{,}65\ rapes$$

Con 273 rapes estará en el percentil 96.

3.- (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ -x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$$

con *a* y *b* números reales.

(I) Halla *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en $x=0$.
(II) Para los valores anteriores de *a* y *b* analiza si *f* tiene un extremo relativo en $x=0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$

(I) La función es continua en x = 0 si cumple:

- Existe $f(0)=\cos 0=1$
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+ax+b\right)=b$
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\cos x\right)=1$
- Los tres valores deben ser iguales. Entonces $\boxed{b=1}$

La función debe ser derivable en x = 0, luego la derivada por izquierda y derecha de 0 deben coincidir.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ -x^2+ax+b, & x>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen} x, & x<0\\ -2x+a, & x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-\operatorname{sen} 0=0\\ f'(0^+)=-0+a=a\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=0}$$

(II) La función es

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ -x^2+1, & x>0\end{cases}$$

Para que tenga un extremo relativo en x = 0 debe haber un cambio en el crecimiento de la función en valores próximos a 0 por la izquierda y en valores próximos a 0 por la derecha.

Si tomamos x = –0,01 la derivada vale $f'(-0,01)=-\operatorname{sen}\left(-0,01\right)<0$. La función decrece antes de 0.

Si tomamos x = 0,01 la derivada vale $f'(0,01)=-\left(0,01\right)^2+1=0,9999>0$. La función crece después de 0.

La función presenta un máximo en x = 0. Un mínimo relativo en x = 0.

(III) El área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$ se divide en dos partes $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ y $\left[0,1\right]$ ya que la función cambia de definición en este intervalo.

$$Área=\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x dx\right|+\left|\int_{0}^{1}-x^2+1dx\right|=\left|\left[senx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1\right|=$$

$$=\left|sen0-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\left[-\frac{1^3}{3}+1\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+0\right]\right|=$$

$$=1+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{5}{3}u^2}$$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

(I) Calculemos el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2$$

Si igualamos a cero.

$|A|=0\Rightarrow -a^3+3a-2=0$. Resolvemos por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & & -1 & -1 & 2\\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0\end{array}$$

Una de las raíces es a = 1

Resolvemos la ecuación de 2º grado restante

$$-a^2-a+2=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}x=\dfrac{1+3}{-2}=-2\\[2ex] x=\dfrac{1-3}{-2}=1\end{cases}$$

Existe la inversa de A para cualquier valor de a distinto de 1 y –2.

(I) El determinante de A y cuando se anula ya se ha estudiado, por lo que hay tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a\neq 1\ y\ a\neq -2$

En este caso el sistema es compatible determinado (una única solución) ya que el rango de A es 3, el de la matriz ampliada y el número de incógnitas también.

CASO 2. $a=1$

La matriz A y A/B quedan

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

El rango de A es 1 ya que todas las filas son iguales. El rango de A/B también es 1 ya que todas las filas y columnas son iguales. El número de incógnitas es 3.

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a=-2$

La matriz A y A/B quedan

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 ya que el menor que queda al eliminar la 3ª columna y 3ª fila tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$$

El rango de A/B es 3 ya que el menor que queda al eliminar la 1ª columna tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1-2-2-1-4-1=-9\neq 0$$

El rango de A y el de A/B es distinto, por lo que el sistema es incompatible. No tiene solución.

(II) Es compatible para el caso 1 y caso 2 estudiados.

Para el caso 2 ($a=1$) el sistema queda:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Las tres ecuaciones son iguales}\\ \text{El sistema se reduce a una sola ecuación}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+z=1\Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=1-y-z\\ y=y\\ z=z\end{cases}}$$

Para el caso 1 ($a\neq 1\ y\ a\neq -2$) utilizamos la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a+1+a-a^2-1-1}{-a^3+3a-2}=\frac{-a^2+2a-1}{-a^3+3a-2}=\frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{1}{a+2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1+a+a-a^2-1-1}{-a^3+3a-2}=\frac{-a^2+2a-1}{-a^3+3a-2}=\frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{1}{a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a+a+1-a^2-1-1}{-a^3+3a-2}=\frac{-a^2+2a-1}{-a^3+3a-2}=\frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{1}{a+2}$$

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x+y-z-3=0$ y la recta $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto P=(1,2,–1), es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

(I) La recta que buscamos "s" pasa por el punto P=(1,2,–1) y es perpendicular a recta y paralela al plano. Su vector director debe ser perpendicular al director de la recta r $\vec{v_r}=(-1,1,-3)$ y al normal del plano $\vec{n}=(2,1,-1)$. Nos sirve como vector director de s el producto vectorial de ambos.

$$\vec{v_s}=\vec{n}\times\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-3i+j+2k+k+6j+i=-2i+7j+3k=(-2,7,3)$$

La recta que buscamos "s" pasa por el punto P=(1,2,–1) y tiene vector director $\vec{v_s}=(-2,7,3)$.

$$s:\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+7t \\ z=-1+3t \end{cases}$$

(II) La distancia de la recta s al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano, por ser paralela al plano.

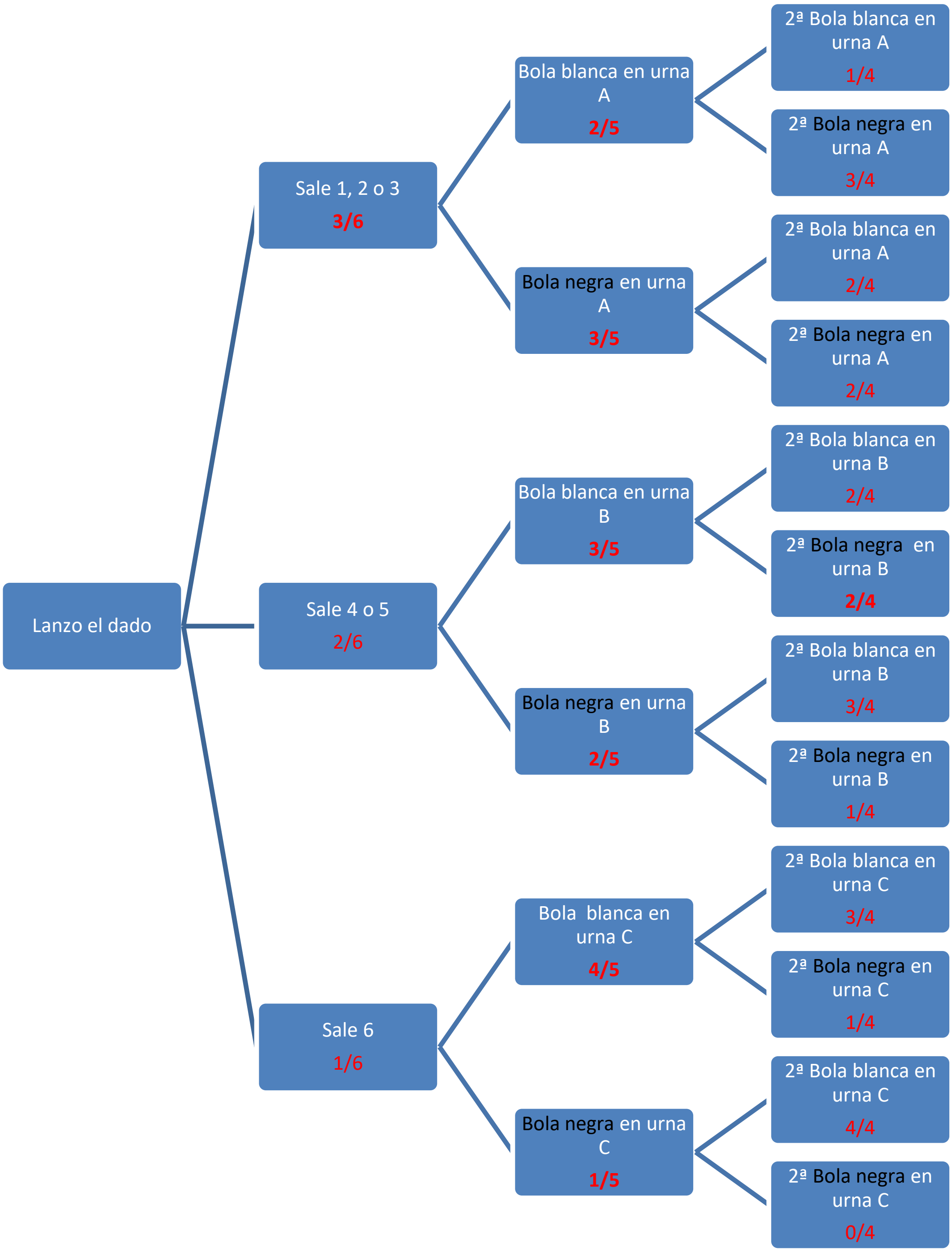
$$\text{Distancia}(s,\pi)=\text{Distancia}(P,\pi)=\frac{|2(1)+2-(-1)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{6}}\,u}$$

2.- (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale 1,2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

Realicemos un diagrama de árbol que nos ayude en el cálculo de probabilidades de este experimento compuesto.



(I) Siguiendo el esquema del diagrama de árbol

$$P(\text{Sacar dos bolas blancas}) =$$

$$= P(\text{Elegir urna A})P(\text{Sacar dos bolas blancas en urna A}) +$$

$$+P(\text{Elegir urna B})P(\text{Sacar dos bolas blancas en urna B}) +$$

$$+P(\text{Elegir urna C})P(\text{Sacar dos bolas blancas en urna C}) =$$

$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{30}{120} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25}$$

(II)

$$P(\text{Sean de urna A/ salen 2 blancas}) = \frac{P(\text{Salen 2 blancas de la urna A})}{P(\text{Sacar 2 blancas})} =$$

$$= \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5} = 0,2}$$

3.- (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con *a* y *b* números reales.

(I) Halla *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de *a* y *b* analiza si *f* tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$

Hecho en propuesta A.

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Hecho en propuesta A.