



Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones, A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2 + a - 2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2 (2 puntos)

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e+1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y

$g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos).

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P \equiv (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

B3) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 9) & x \leq 1 \\ \cos \frac{\pi x}{2} & x > 1 \\ \frac{a \cdot (1-x)}{2} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -(a+1) & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = \\ &= (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & -a-1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 1 & -a-1 & -(1+a) \end{vmatrix} = \\ &= \{ \text{Sumamos a la 3ª fila la 2ª} \} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a+1)(a-1)(a+1-1) = |A| = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -(a+1) & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = \\ &= (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & -a-1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 1 & -a-1 & -(1+a) \end{vmatrix} = \\ &= \{ \text{Sumamos a la 3ª fila la 2ª} \} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a+1)(a-1)(a+1-1) = (a+1)(a-1)a \end{aligned}$$

Si lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow (a+1)(a-1)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Estudiemos los cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

Utilizando la regla de Cramer las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 0 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)(a-1)a} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)a}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{(a+1)a} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{a} = \frac{-a^2 - 2a - 1 - 1 + 1 + a^2 + 3a + 2}{a}$$

$$x = \frac{a+1}{a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 1-a \\ -a-1 & -1 & (a-1)(a+2) \\ a+1 & 0 & (1-a)(a+1) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1-a \\ -1 & -1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & 0 & (1-a)(a+1) \end{vmatrix}}{(a+1)(a-1)a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & (a+2) \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{vmatrix}}{(a-1)a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & (a+2) \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{vmatrix}}{a} = \frac{a+1+a^2+3a+2-1-a^2-2a-1}{a}$$

$$y = \frac{2a+1}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{(a+1)(a-1)a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{(a-1)a}$$

$$z = \frac{1+a^2+2a+1-1-a^2-2a-1-a-1}{(a-1)a} = \frac{-1}{(a-1)a} = \frac{-1}{a-1}$$

$$z = \frac{1}{1-a}$$

CASO 2. $a = 0$.

El sistema queda

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible. La 1ª y la 3ª ecuación tienen igual el primer

miembro y diferente el 2º.

CASO 3. $a = 1$.

El sistema queda

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -2x + 2y = -1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Vuelve a ser un sistema incompatible, la 2ª y 3ª ecuación no se

pueden cumplir al mismo tiempo.

CASO 4. $a = -1$

El sistema queda

$$\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -2z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

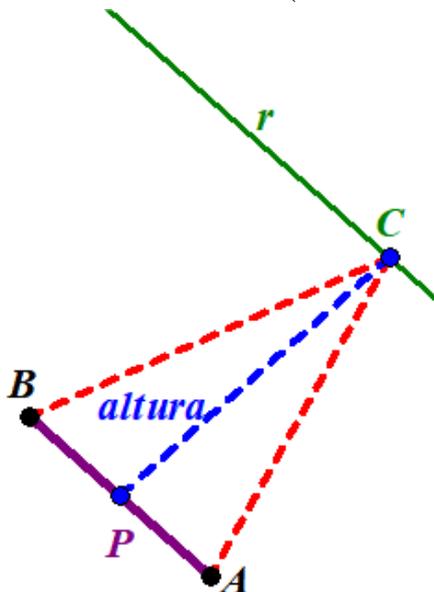
El sistema es compatible indeterminado. La solución es $x = t, y = 1, z = 0,5$.

A2) Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2 (2 puntos)

La recta r tiene ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

El tercer vértice está en la recta y tiene coordenadas $C \equiv (3 + 2t, 4 - t, 4 - 2t)$



El vector $\overline{AB} = (0, 1, -2) - (2, -3, 2) = (-2, 4, -4)$.

La longitud de la base es $|\overline{AB}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$.

El punto medio del segmento AB es $P = \frac{(0, 1, -2) + (2, -3, 2)}{2} = \frac{(2, -2, 0)}{2} = (1, -1, 0)$.

La altura del triángulo es el módulo del vector que une P con C.

$$|\overline{PC}| = |(3+2t, 4-t, 4-2t) - (1, -1, 0)| = |(2+2t, 5-t, 4-2t)| = \sqrt{(2+2t)^2 + (5-t)^2 + (4-2t)^2}$$

$$|\overline{PC}| = \sqrt{4+4t^2+8t+25+t^2-10t+16+4t^2-16t} = \sqrt{9t^2-18t+45}$$

Como el área del triángulo es 18 se cumple:

$$18 = \frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{9t^2-18t+45}}{2}$$

$$36 = 6 \cdot \sqrt{9t^2-18t+45}$$

$$6 = \sqrt{9t^2-18t+45}$$

$$36 = 9t^2 - 18t + 45$$

$$9t^2 - 18t + 9 = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

El punto C es

$$\left. \begin{array}{l} C \equiv (3+2t, 4-t, 4-2t) \\ t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C \equiv (5, 3, 2)}$$

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e+1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

La función es continua en el intervalo $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$, siendo su derivada:

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \ln (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{e}{x} \ln (x + ex - e)$$

Derivamos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e}$$

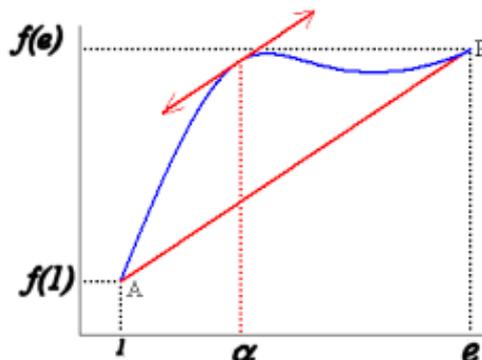
$$f'(x) = f(x) \left[-\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e} \right]$$

$$f'(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \left[-\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e} \right]$$

Calculamos $f(1) = (1 + e - e)^{\frac{e}{1}} = 1$; $f(e) = (e + e^2 - e)^{\frac{e}{e}} = e^2$

La pendiente de la recta que une el punto $(1,1)$ con el punto (e, e^2) es

$$\text{pendiente} = \frac{e^2 - 1}{e - 1} = \frac{(e-1)(e+1)}{e-1} = e+1$$



Según el teorema de Rolle, existe un valor $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}$.

Es decir, existe un valor $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = 1 + e$

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y

$g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos).

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \Rightarrow \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 1$$

Por tanteo, comprobamos que $x = 0$ cumple la ecuación, pues $\cos 0 = \frac{0}{\pi^2} + 1$. Es cierto.

También se cumple para $x = \pi$ pues $\cos \pi = \frac{-2\pi^2}{\pi^2} + 1 = -2 + 1 = -1$. Es cierto.

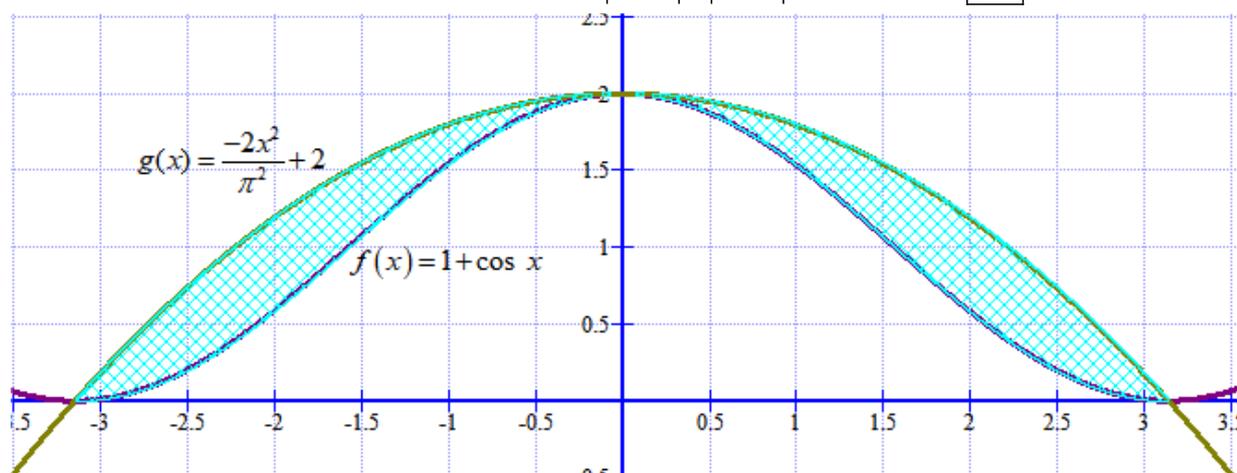
También se cumple para $x = -\pi$ pues $\cos(-\pi) = \frac{-2\pi^2}{\pi^2} + 1 = -2 + 1 = -1$. Es cierto.

El área se calcula hallando el valor de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre $x = -\pi$ y $x = 0$ y de la integral definida entre $x = 0$ y $x = \pi$. Luego se suman sus valores absolutos.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 1 + \cos x - \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \right) dx &= \int_{-\pi}^0 1 + \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 2 dx = \int_{-\pi}^0 \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 1 dx = \left[\text{sen}x + \frac{2x^3}{3\pi^2} - x \right]_{-\pi}^0 = \\ &= \left[\text{sen}0 + \frac{0}{3\pi^2} - 0 \right] - \left[\text{sen}(-\pi) + \frac{2(-\pi)^3}{3\pi^2} - (-\pi) \right] = \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 1 + \cos x - \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \right) dx &= \int_0^{\pi} \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 1 dx = \left[\text{sen}x + \frac{2x^3}{3\pi^2} - x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left[\text{sen}\pi + \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi \right] - \left[\text{sen}0 + \frac{0}{3\pi^2} - 0 \right] = \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

El área de la región que nos piden calcular es $\left|-\frac{1}{3}\pi\right| + \left|-\frac{1}{3}\pi\right| = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$



OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos la suma de las matrices y su producto.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2-t+t & -t^2+t^2-t & -t^2-t+t^2+t \\ t^2+t+1-t^2+1 & t-t^2+t-1 & 1-t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2 & -t & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes del producto y de la suma.

El determinante de $A+B$ es 0 ya que la columna segunda es todo ceros.

El determinante de $A \cdot B$ es:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2 & -t & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común en 1ª fila } (t-1) \\ \text{y en 2ª fila } (t) \end{array} \right\} =$$

$$= (t-1)t \begin{vmatrix} 1 & t-1 & t+1 \\ -t & -1 & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Saco factor común en 3ª columna } (t+1) \right\} =$$

$$= (t-1)t(t+1) \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ -t & -1 & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t+2 \end{vmatrix} = (t-1)t(t+1) \left(t-2 + \cancel{t} - 2t^2 + t + t + 2 - \cancel{t} + 3t^2 - 2t \right)$$

$$|A \cdot B| = (t-1)t(t+1)(t^2+t) = (t-1)t(t+1)t(t+1)$$

Entonces

$$|A \cdot B| = |A + B| \Rightarrow (t-1)t(t+1)t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P \equiv (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

Hallemos la ecuación del plano π que contiene a la recta r y el punto P . Después la ecuación del plano π' que contiene a la recta s y el punto P . La recta t es la definida por ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv a(-x + y - z - 1) + b(3y - 2z + 3) = 0 \\ P(1, -2, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow a(-1 - 2 + 1 - 1) + b(-6 + 2 + 3) = 0$$

$$-3a - b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

El plano π tiene ecuación:

$$\begin{aligned} \pi &\equiv a(-x + y - z - 1) - 3a(3y - 2z + 3) = 0 \Rightarrow (-x + y - z - 1) - 3(3y - 2z + 3) = 0 \\ \pi &\equiv -x - 8y + 5z - 10 = 0 \end{aligned}$$

El plano π' pasa por $P \equiv (1, -2, -1)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 1, -1)$ y

$\vec{AP} = (1, -2, -1) - (3, 1, -1) = (-2, -3, 0)$, siendo $A(3, 1, -1)$ un punto de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, -1) \in \pi' \\ \vec{u} = (0, 1, -1) \\ \vec{AP} = (-2, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$2y + 4 + 2z + 2 - 3x + 3 = 0$$

$$\pi' \equiv -3x + 2y + 2z + 9 = 0$$

La recta t es la definida por la intersección de los planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x - 8y + 5z - 10 = 0 \\ \pi' \equiv -3x + 2y + 2z + 9 = 0 \end{array} \right\}$$

Ya está resuelto el problema, pero nos tomamos la molestia de obtener su ecuación continua.

El vector director de la recta $t \equiv \left. \begin{array}{l} -x - 8y + 5z - 10 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 9 = 0 \end{array} \right\}$ es el producto vectorial de los normales de cada plano que la definen.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16i - 15j - 2k - 24k + 2j - 10i = -26i - 13j - 26k$$

$$\vec{v}_r = (-26, -13, -26)$$

Reduciendo las coordenadas del vector dividiendo por -13 , podemos tomar como vector director de la recta $\vec{v}_r = (2, 1, 2)$

Un punto de la recta se puede tomar el punto $P(1, -2, -1)$.

La ecuación de la recta t es $\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}}$

OTRA MANERA DE RESOLVERLO

Veamos cual es la posición relativa de las rectas r y s .

El vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ es el producto vectorial de los normales de cada plano que la definen.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2i - 3k - 2j + 3i = i - 2j - 3k = (1, -2, -3)$$

Y el vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$

¿Son paralelas o coincidentes? ¿Son las coordenadas de los vectores directores proporcionales?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, -3) \\ \vec{v}_s = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{0} = \frac{-2}{1} = \frac{-3}{-1} \end{array} ? , \text{ la respuesta es que no son ciertas las igualdades y las rectas}$$

solo pueden ser secantes o se cruzan.

Averiguemos un punto de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow -x - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = -2$$

El punto de la recta r es $P_r = (-2, -1, 0)$

Un punto de s puede ser $P_s = (3, 1, -1)$

El vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 1, -1) - (-2, -1, 0) = (5, 2, -1)$

Calculemos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r = (1, -2, -3)$, $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$ y $\overrightarrow{P_r P_s} = (5, 2, -1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 10 + 15 + 2 = 26 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y obtengamos las coordenadas de un punto cualquiera de cada una de las rectas.

La ecuación de la recta r es

$$\left. \begin{array}{l} P_r = (-2, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, -2, -3) \end{array} \right\} r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases} \Rightarrow Q_r = (-2 + t, -1 - 2t, -3t)$$

Y la ecuación de la recta s es

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 1+t' \\ z = -1-t' \end{cases} \Rightarrow Q_s = (3, 1+t', -1-t')$$

El vector director de la recta t debe pasar por un punto de r y otro de s . Por lo que los vectores $\overrightarrow{PQ_s}$ y $\overrightarrow{PQ_r}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PQ_r} &= (-2+t, -1-2t, -3t) - (1, -2, -1) = (-3+t, 1-2t, 1-3t) \\ \overrightarrow{PQ_s} &= (3, 1+t', -1-t') - (1, -2, -1) = (2, 3+t', -t') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-3+t}{2} = \frac{1-2t}{3+t'} = \frac{1-3t}{-t'}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{-3+t}{2} = \frac{1-2t}{3+t'} \\ \frac{-3+t}{2} = \frac{1-3t}{-t'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (-3+t)(3+t') = 2(1-2t) \\ -t'(-3+t) = 2(1-3t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9-3t'+3t+tt' = 2-4t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3t'+tt' = 11-7t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} t'(-3+t) = 11-7t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} t' = \frac{11-7t}{-3+t} \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{cases} \Rightarrow \frac{11-7t}{-3+t} = \frac{-2+6t}{-3+t} \Rightarrow 11-7t = -2+6t$$

$$-7t - 6t = -2 - 11 \Rightarrow -13t = -13 \Rightarrow t = 1$$

Para $t = 1$ el vector director de la recta t es

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_t = \overrightarrow{PQ_r} = (-3+t, 1-2t, 1-3t) \\ t = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_t = (-2, -1, -2)$$

La recta t tiene ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_t = (-2, -1, -2) \\ P \equiv (1, -2, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

B3) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 9) & x \leq 1 \\ \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

Para que sea continua en todo \mathbb{R} debe de serlo en $x = 1$. Para ello se deben cumplir:

- Existe $f(1) = \log(1^2 + 9) = \log 10 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x^2 + 9) = \log 10 = 1$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{a \cdot (1-1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{-a} = \frac{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{-a} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-a} = \frac{\pi}{2a}$$

- Los tres valores son iguales. $\frac{\pi}{2a} = 1 \Rightarrow \pi = 2a \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

La derivada de $f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$ es

$$f'(x) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2}$$

Resolver la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow -\pi \operatorname{sen}(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2} = 0$

Y esta ecuación es demasiado compleja.

Acudamos al teorema de Bolzano. La función $f'(x)$ es continua en el intervalo $(-1, 0)$, pues el denominador se anula en $x = 1$ y $x = 2$, que no pertenecen al intervalo.

En los extremos del intervalo $(-1, 0)$ la derivada vale

$$f'(-1) = -\pi \operatorname{sen}(-\pi) \cdot \ln(1+3+2) + \cos(-\pi) \cdot \frac{-2-3}{1+3+2} = -\frac{-5}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

Y

$$f'(0) = -\pi \operatorname{sen}(0) \cdot \ln(0^2 - 0 + 2) + \cos(0) \cdot \frac{0-3}{0^2 - 0 + 2} = \frac{-3}{2} < 0$$

Por lo tanto existe un punto donde la función $f'(x)$ se anula. Este sería un punto crítico de la función $f(x)$ y como la derivada pasa de positiva (crece $f(x)$) a negativa (decrece $f(x)$), entonces debe de ser un máximo relativo.