LVI Olimpiada Matemática Española

Primera fase

Primera sesión

<u>Viernes mañana, 17 de enero de 2020</u>

1. Dado un número natural $n>1$, realizamos la siguiente operación, si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso, en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar, razonando la respuesta, todos los valores de n para los cuales este proceso es finito; es decir, se llega a 1 en algún momento.

2. Consideremos 2020 números reales $a_1, a_2, ..., a_{2020}$ de manera que la suma de cualesquiera 1009 de ellos es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.

3. Determinar todas las ternas (x, y, z) de números reales para los cuales

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x^2y+y^2z+z^2x=xy^2+yz^2+zx^2 \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\}$$

No está permitido el uso de calculadoras.

El tiempo de cada sesión es de dos horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española
Primera fase
Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020

4. Consideramos el polinomio
$$p(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$
con a, b y c números reales. Demostrar que $p(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ si, y solamente si, $a=b=c$

5. Dado un punto E interior al cuadrado ABCD, se sabe que los segmentos que determina E con los vértices A, B, C y D tienen longitudes 3, $\sqrt{8}$, 5 y x respectivamente. Hallar x y la longitud del cuadrado.

6. Determinar las dos últimas cifras de la expresión decimal de los números 2019^{2019} y $2019^{2019^{2019}}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
El tiempo de cada sesión es de dos horas y media.

SOLUCIONES obtenidas por Andrés López y Juan Antonio Martínez

Ejercicio 1.

Veamos los casos particulares, es decir, vamos a ver qué pasa con los 20 primeros números.

2 → 2/2 = 1
3 → 3 + 5 = 8 / 2 = 4 / 2 = 2 visto antes que llega a 1.
4 → 4 / 2 = 2 / 2 = 1
5 → 5 + 5 = 10 / 2 = 5 entra en bucle.
6 → 6 / 2 = 3 visto antes que llega a 1.
7 → 7 + 5 = 12 / 2 = 6 visto antes que llega a 1.
8 → 8 / 2 = 4 visto antes que llega a 1.
9 → 9 + 5 = 14 / 2 = 7 visto antes que llega a 1.
10 → 10 / 2 = 5 Entra en bucle.
11 → 11 + 5 = 16 / 2 = 8 visto antes que llega a 1.
12 → 12 / 2 = 6 visto antes que llega a 1.
13 → 13 + 5 = 18 / 2 = 9 visto antes que llega a 1.
14 → 14 / 2 = 7 visto antes que llega a 1.
15 → 15 + 5 = 20 / 10 Entra en bucle.
16 → 16 / 2 = 8 visto antes que llega a 1.
17 → 17 + 5 = 22 / 2 = 11 visto antes que llega a 1.
18 → 18 / 2 = 9 visto antes que llega a 1.
19 → 19 + 5 = 24 / 2 = 12 visto antes que llega a 1.
20 → 20 / 2 = 10 Entra en bucle.
21 → 21 +5 = 26 / 2 = 13 visto antes que llega a 1.
22 → 22 / 2 = 11 visto antes que llega a 1.
….
1032 → 1032 / 2 = 516 / 2 =258 / 2 = 129 + 5 = 134 / 2 = 67 + 5 = 72 / 2 = 36 / 2 = 18 visto antes que llega a 1.
…
1040 → 1040 / 2 = 520 / 2 = 260 / 2 = 130 / 2 = 65 + 5 = 70 / 2 = 35 + 5 = 40 / 2 = 20 Entra en bucle.

Con lo observado, podemos afirmar que **los únicos números en los que el proceso es finito son los no múltiplos de 5.**

Demostrémoslo.

PRIMERO.

Los múltiplos de 5 (n = 5k, siendo k un número natural) entran en bucle.

K = 1 → 5 lo cumple

K = 2 → 10 lo cumple

K = 3 → 15 lo cumple

….

Supongamos que lo cumple un valor k (5k entra en bucle y los anteriores a él tambien), demostremos que lo cumple también k + 1 (¿5(k+1) entra en bucle?) y estaría demostrado para cualquier múltiplo de 5.

$5(k+1)$ tiene dos posibilidades ser par o impar.

- Si es par (k+1 es par) → lo dividimos entre 2

  $\frac{5(k+1)}{2}=5\frac{k+1}{2}$ sigue siendo múltiplo de 5 y es menor que $5k \Rightarrow$ Entra en bucle

  $5\left(\frac{k+1}{2}\right)<5k$ ya que $\frac{k+1}{2}<k \to k+1<2k \to 1<k$ ¡¡¡Cierto!!!

- Si es impar (k es par) → le sumamos 5 y pasa a ser par y lo dividimos por 2.

  $5(k+1)+5=5k+10$ es par $\to \frac{5k+10}{2}=5\frac{k}{2}+5$ es múltiplo de 5 y $<5k \Rightarrow$ Entra en bucle

  $\frac{5k+10}{2}<5k$ ya que $5k+10<10k \to 10<5k \to 2<k$ ¡¡¡Cierto!!!

Queda demostrado.

SEGUNDO.

Si el número no es múltiplo de 5 llega a 1.
Si no es múltiplo de 5 el número es 5k + 1 o 5k + 2 o 5k + 3 o 5k + 4.
K = 1 → 6, 7, 8 y 9 llegan a 1. Visto al principio
K = 2 → 11, 12, 13 y 14 llegan a 1. Visto al principio.
K = 3 →16, 17, 18 y 19 llegan a 1. Visto al principio.

Supongamos cierto para un valor k y los anteriores, comprobemos que $5\cdot(k+1)+1,\ 5\cdot(k+1)+2,\ 5\cdot(k+1)+3\ y\ 5\cdot(k+1)+4$ llegan a 1.

- $5(k+1)+1=5k+6$ Tiene dos posibilidades:
  - Ser par (k debe ser par) →divido por 2 → $\frac{5(k+1)+1}{2}=5\frac{k}{2}+3$ no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.

    Comprobemos que $\frac{5k}{2}+3<5k \to 5k+6<10k \to 6<5k$. Es cierto para k igual o mayor que 2 ¡¡¡Cierto!!!

  - Ser impar (k+1 es par) → sumo 5 obteniendo nº par entonces divido por 2 → $5(k+1)+1+5=5(k+1)+6 = \to \frac{5(k+1)}{2}+3=5\frac{(k+1)}{2}+3$ Este número no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.

    Comprobemos que $\frac{5(k+1)}{2}+3<5k \to 5k+5+6<10k \to 11<5k$, es cierto a partir de 3. ¡¡¡Cierto!!!

- $5(k+1)+2=5k+7$ Tiene dos posibilidades:
  - Ser par (k+1 debe ser par) → divido por 2 → $\frac{5(k+1)+2}{2}=5\frac{k+1}{2}+1$ no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.

    Comprobemos que $\frac{5k+5}{2}+1<5k \to 5k+5+2<10k \to 7<5k$. Es cierto para k igual o mayor que 2 ¡¡¡Cierto!!!

- Ser impar (k+1 es par) →sumo 5 obtengo nº par entonces divido por 2 → $5(k+1)+1+5=5(k+1)+6 \Longrightarrow \frac{5(k+1)}{2}+3=5\frac{(k+1)}{2}+3$ Este número no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.
  Comprobemos que $\frac{5(k+1)}{2}+3<5k \to 5k+5+6<10k \to 11<5k$, es cierto a partir de 3. ¡¡¡Cierto!!!

* $5(k+1)+3=5k+8$ Tiene dos posibilidades:
  - Ser par (k es par) → divido por 2 → $\frac{5k+8}{2}=5\frac{k}{2}+4$ no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.
    Comprobemos que $5\frac{k}{2}+4<5k \to 5k+8<10k \to 8<5k$. Es cierto para k igual o mayor que 2 ¡¡¡Cierto!!!
  - Ser impar (k+1 es par) →sumo 5 obteniendo nº par entonces divido por 2 → $5(k+1)+3+5=5(k+1)+8 \to \frac{5(k+1)}{2}+4=5\frac{k+1}{2}+4$ Este número no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.
    Comprobemos que $\frac{5(k+1)}{2}+4<5k \to 5k+5+8<10k \to 13<5k$, es cierto a partir de 3. ¡¡¡Cierto!!!

* $5(k+1)+4=5k+9$ Tiene dos posibilidades:
  - Ser par (k+1 debe ser par) →divido por 2 → $\frac{5(k+1)+4}{2}=5\frac{k+1}{2}+2$ no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.
    Comprobemos que $5\frac{k+1}{2}+2<5k \to 5k+5+4<10k \to 9<5k$. Es cierto para k igual o mayor que 2 ¡¡¡Cierto!!!
  - Ser impar (k es par) →sumo 5 obteniendo nº par entonces divido por 2 → $5k+9+5=5k+14 \Longrightarrow \frac{5k+14}{2}=5\frac{k}{2}+7$ Este número no es múltiplo de 5 y es menor que 5k, entonces llega a 1.
    Comprobemos que $5\frac{k}{2}+7<5k \to 5k+14<10k \to 14<5k$, es cierto a partir de k igual o mayor que 3.

Por inducción queda probado que los múltiplos de 5 con este proceso no llegan a 1, entran en un bucle infinito y los números no múltiplos de 5 con este proceso llegan a 1.

Ejercicio 2. Si tomamos los primeros 1009 números su suma es positiva:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1009} > 0$$

Si tomamos los 1009 siguientes también su suma es positiva.

$$a_{1010} + a_{1011} + a_{1012} + ... + a_{2018} > 0$$

Si tomamos la suma de los 2020 números y agrupamos.

$$\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1009}\right) + \left(a_{1010} + a_{1011} + a_{1012} + ... + a_{2018}\right) + a_{2019} + a_{2020}$$

Sabemos que el primer paréntesis es positivo y el segundo también, pero no sabemos si son positivos el a_{2019} y el a_{2020}.

Pero como $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1009} > 0$, al menos uno de ellos es positivo. Supongamos que es el a_1, nos da igual suponer que lo fuese cualquier otro.
Razonando de la misma manera $a_{1010} + a_{1011} + a_{1012} + ... + a_{2018} > 0$, al menos uno de ellos es positivo. Supongamos que es el a_{1010}, nos da igual suponer que lo fuese cualquier otro.

Consideramos ahora la suma de los 2020 números agrupados de forma que cambiamos el a_1 por el a_{2019} y el a_{1010} por el a_{2020}.

$$\left(a_{2019} + a_2 + a_3 + ... + a_{1009}\right) + \left(a_{2020} + a_{1011} + a_{1012} + ... + a_{2018}\right) + a_1 + a_{1010}$$

Estos dos paréntesis son positivos pues son 1009 números y según el enunciado su suma es positiva. Lo mismo ocurre con el segundo paréntesis. Además a_1 es positivo y a_{1010} también es positivo. Por lo tanto esa suma es positiva y queda demostrado que la suma de los 2020 números es positiva.

Ejercicio 3. Comprobemos que sale de hacer el producto $(x-y)(x-z)(y-z)$:

$$\begin{aligned}&(x-y)(x-z)(y-z)=\left(x^2-xz-yx+yz\right)(y-z)=\\&=x^2y-\cancel{xyz}-y^2x+y^2z-x^2z+xz^2+\cancel{yxz}-yz^2=\\&=x^2y+y^2z+z^2x-xy^2-yz^2-zx^2\end{aligned}$$

Si la segunda ecuación pasamos todo al lado izquierdo de la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\x^2y+y^2z+z^2x=xy^2+yz^2+zx^2\\x^3+y^2+z=y^3+z^2+x\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\\Rightarrow x^2y+y^2z+z^2x-xy^2-yz^2-zx^2=0\\x^3+y^2+z=y^3+z^2+x\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\\Rightarrow (x-y)(x-z)(y-z)=0\\x^3+y^2+z=y^3+z^2+x\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación surgen tres posibilidades diferentes que nos llevan a 3 sistemas distintos.

1ª opción:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\x-y=0\\x^3+y^2+z=y^3+z^2+x\end{array}\right\}$$

2ª opción:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\x-z=0\\x^3+y^2+z=y^3+z^2+x\end{array}\right\}$$

3ª opción:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\y-z=0\\x^3+y^2+z=y^3+z^2+x\end{array}\right\}$$

Resolvemos cada uno de estos sistemas.

1ª opción:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y=0 \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x=y \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+y+z=1 \\ \cancel{y^3}+y^2+z=\cancel{y^3}+z^2+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ y^2+z=z^2+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=1-2y \\ y^2+1-2y=(1-2y)^2+y \end{array}\right\} \Rightarrow y^2+\cancel{1}-2y=\cancel{1}+4y^2-4y+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=3y^2-y \Rightarrow y(3y-1)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=0} \to \boxed{z=1-0=1} \to \boxed{x=y=0} \\ 3y-1=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}} \to \boxed{z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}} \to \boxed{x=y=\frac{1}{3}} \end{array}\right.$$

2ª opción:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-z=0 \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x=z \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z+y+z=1 \\ z^3+y^2+\cancel{z}=y^3+z^2+\cancel{z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+2z=1 \\ z^3+y^2=y^3+z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1-2z \\ z^3+y^2=y^3+z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^3+(1-2z)^2=(1-2z)^3+z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^3+\cancel{1}+\cancel{4z^2}-\cancel{4z}=\cancel{1}+\cancel{4z^2}-\cancel{4z}-2z-8z^3+8z^2+z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9z^3+9z^2+2z=0 \Rightarrow z\left(9z^2+9z+2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z=0} \to \boxed{y=1-0=1} \to \boxed{x=z=0} \\ 9z^2+9z+2=0 \Rightarrow z=\frac{-9\pm\sqrt{81-72}}{18}=\frac{-9\pm 3}{18}=\left\{\begin{array}{l} z=\frac{-9+3}{18}=\frac{-1}{3} \\ z=\frac{-9-3}{18}=\frac{-2}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{z=\frac{-1}{3}} \to \boxed{y=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}} \to \boxed{x=z=\frac{-1}{3}} \\ \Rightarrow \boxed{z=\frac{-2}{3}} \to \boxed{y=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}} \to \boxed{x=z=\frac{-2}{3}} \end{array}\right.$$

3ª opción:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y-z=0 \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=z \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z+z=1 \\ x^3+\cancel{z^2}+z=z^3+\cancel{z^2}+x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=1 \\ x^3+z=z^3+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-2z \\ x^3+z=z^3+x \end{array}\right\} \Rightarrow (1-2z)^3+z=z^3+1-2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1}+4z^2-4z-\cancel{2z}-8z^3+8z^2+z=z^3+\cancel{1}-\cancel{2z} \Rightarrow -9z^3+12z^2-3z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z\left(3z^2-4z+1\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ 3z^2-4z+1=0 \Rightarrow z=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \boxed{z=0} \rightarrow \boxed{x=1-0=1} \rightarrow \boxed{y=z=0} \\ \boxed{z=\dfrac{4+2}{6}=1} \rightarrow \boxed{x=1-2=-1} \rightarrow \boxed{y=z=1} \\ \boxed{z=\dfrac{4-2}{6}=\dfrac{1}{3}} \rightarrow \boxed{x=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}} \rightarrow \boxed{y=z=\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

Las soluciones son $(0,0,1);\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);(0,1,0);\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-1}{3}\right);\left(\frac{-2}{3},\frac{7}{3},\frac{-2}{3}\right);(1,0,0);(-1,1,1)$

Ejercicio 4.

MANERA 1.

Demostremos las dos implicaciones.

1ª implicación. Si $a=b=c$ entonces $p(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$

Si $a=b=c$ el polinomio se convierte en:

$$p(x)=(x-a)(x-a)+(x-a)(x-a)+(x-a)(x-a)$$

$$p(x)=(x-a)^2+(x-a)^2+(x-a)^2$$

Este polinomio es una suma de cuadrados que siempre toma valor positivo o cero. Demostrado.

2ª implicación. Si $p(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ entonces $a=b=c$.

Calculamos el valor de p(a), p(b) y p(c).

$$p(\mathrm{a})=(a-a)(a-b)+(a-b)(a-c)+(a-c)(a-a)=(a-b)(a-c)\geq 0$$

$$p(\mathrm{b})=(b-a)(b-b)+(b-b)(b-c)+(b-c)(b-a)=(b-c)(b-a)\geq 0$$

$$p(\mathrm{c})=(c-a)(c-b)+(c-b)(c-c)+(c-c)(c-a)=(c-a)(c-b)\geq 0$$

Hemos obtenido que:

$$\left.\begin{array}{l}(a-b)(a-c)\geq 0\\(b-c)(b-a)\geq 0\\(c-a)(c-b)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(a-b)(a-c)\geq 0\\(c-b)(a-b)\geq 0\\(a-c)(c-b)\leq 0\end{array}\right\}$$

Para que el primer producto sea positivo debe ser los dos factores positivos o los dos negativos.

OPCION 1. Si fuesen los dos positivos → $\left.\begin{array}{l}(a-b)\geq 0\\(a-c)\geq 0\end{array}\right\}$ como el segundo producto es positivo y $(a-b)\geq 0$, entonces $(c-b)\geq 0$.

Mirando la tercera inecuación, no puede ser negativa ya que ambos factores son positivos o cero $\left.\begin{array}{l}(c-b)\geq 0\\(a-c)\geq 0\end{array}\right\}$, por lo que debe ser $(a-c)(c-b)=0$.

Por lo que uno de los factores debe ser 0. Supongamos que $a-c=0\Rightarrow\boxed{a=c}$

OPCION 2. Si fuesen los dos negativos → $\left.\begin{array}{l}(a-b)\leq 0\\(a-c)\leq 0\end{array}\right\}$ como el segundo producto es positivo y $(a-b)\leq 0$, entonces $(c-b)\leq 0$.

Mirando la tercera inecuación, no puede ser negativa ya que ambos factores son negativos o cero $\left.\begin{array}{l}(c-b)\leq 0\\(a-c)\leq 0\end{array}\right\}$, por lo que debe ser $(a-c)(c-b)=0$.

Por lo que uno de los factores debe ser 0. Supongamos que $a-c=0\Rightarrow\boxed{a=c}$

Por la simetría del polinomio da igual suponer que $a=c$ que $b=c$.

Supongamos $a = c$, entonces el polinomio queda:

$$p(x) = (x-c)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-c)$$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = 2(x-b)(x-c) + (x-c)^2 \\ p(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(x-b)(x-c) \geq 0;\ \text{Para todo } x \in \mathbb{R}$$

Esta expresión solo puede ser positiva si $b = c$ pues si no fuese así siempre puedo encontrar un número real comprendido entre los dos $b < d < c$ tal que $2(d-b)(d-c) < 0,$ pues $d - b > 0$ y $d - c < 0$.

Luego $\boxed{b = c.}$

Queda demostrado que $a = b = c$

MANERA 2.

Desarrollamos los productos del polinomio de segundo grado, obteniendo la expresión de los coeficientes del mismo:

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

$$p(x) = x^2 - ax - bx + ab + x^2 - bx - cx + bc + x^2 - cx - ax + ac$$

$$p(x) = x^2 + x^2 + x^2 - ax - ax - bx - bx - cx - cx + ab + ac + bc$$

$$p(x) = 3x^2 - 2ax - 2bx - 2cx + ab + ac + bc$$

$$p(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab + ac + bc)$$

Es obvio que el polinomio puede tomar valores no negativos, por lo que *p(x)* será mayor o igual que 0 en todo caso si, y sólo si, su discriminante es menor o igual que 0.
Se puede comprobar fácilmente que

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) =$$

$$= 4\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc)\right] =$$

$$= 4\left[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 3ab - 3ac - 3bc\right] =$$

$$= 4\left[a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right] =$$

$$= 2\left[2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc\right] =$$

$$= 2\left[a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + c^2 - 2bc\right] =$$

$$= 2\left[\left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + \left(a^2 + c^2 - 2ac\right) + \left(b^2 + c^2 - 2bc\right)\right] =$$

$$= 2\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right] \geq 0$$

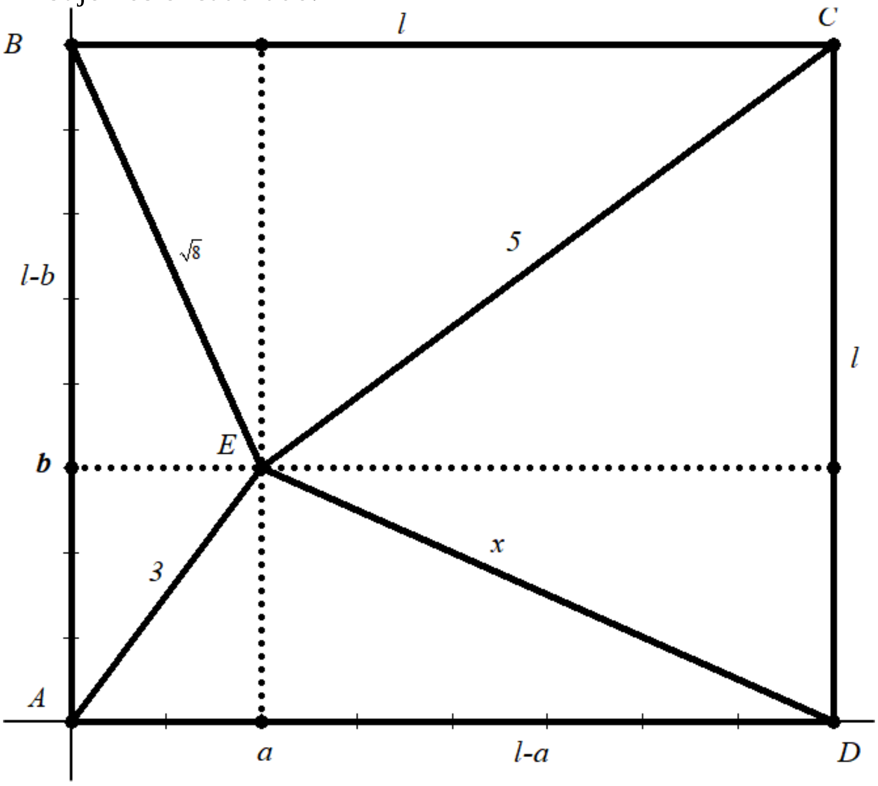
Entonces para que el discriminante sea negativo o cero solo tiene la opción de anularse y para ello debe ser cada uno de los sumandos cero:

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2=0 \to a=b \\ (a-c)^2=0 \to a=c \\ (b-c)^2=0 \to b=c \end{cases}$$

Es decir, a = b = c.

En ese caso el polinomio podría expresarse mediante p(x) = $3(x – a)^2$, que se corresponde con una parábola con vértice en (a; 0).

Ejercicio 5. Dibujemos el cuadrado.



Si al punto E le asignamos coordenadas E(a, b), entonces se cumple, por el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} 3^2 = a^2+b^2 \\ \left(\sqrt{8}\right)^2 = a^2+(l-b)^2 \\ 5^2 = (l-a)^2+(l-b)^2 \\ x^2 = (l-a)^2+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 8-a^2 = (l-b)^2 \\ 25 = (l-a)^2+(l-b)^2 \\ x^2-b^2 = (l-a)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 25 = 8-a^2+x^2-b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 17 = x^2-\left(a^2+b^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 17 = x^2-9 \Rightarrow x^2 = 26 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{26}}$$

Quitamos la tercera ecuación que ofrece información redundante y sustituimos el valor de x. El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 8 = a^2+(l-b)^2 \\ 26 = (l-a)^2+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 8 = a^2+b^2+l^2-2bl \\ 26 = a^2+l^2-2al+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 8 = a^2+b^2+l^2-2bl \\ 26 = a^2+b^2+l^2-2al \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 = a^2+b^2 \\ 8 = 9+l^2-2bl \\ 26 = 9+l^2-2al \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 9=a^2+b^2 \\ \Rightarrow -1=l^2-2bl \\ 17=l^2-2al \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9=a^2+b^2 \\ -1-l^2=-2bl \\ 17-l^2=-2al \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9=a^2+b^2 \\ \dfrac{1+l^2}{2l}=b \\ \dfrac{17-l^2}{-2l}=a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9=\left(\frac{17-l^2}{-2l}\right)^2+\left(\frac{1+l^2}{2l}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9=\frac{289+l^4-34l^2}{4l^2}+\frac{1+l^4+2l^2}{4l^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9=\frac{290+2l^4-32l^2}{4l^2} \Rightarrow 36l^2=290+2l^4-32l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 290+2l^4-68l^2=0 \Rightarrow l^4-34l^2+145=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2=\frac{34\pm\sqrt{1156-580}}{2}=\frac{34\pm 24}{2} \Rightarrow \begin{cases} l^2=\dfrac{34-24}{2}=5 \Rightarrow l=\sqrt{5} \\ l^2=\dfrac{34+24}{2}=29 \Rightarrow l=\sqrt{29} \end{cases}$$

Como el cuadrado no puede tener de lado $\sqrt{5}$, la solución es $\boxed{l=\sqrt{29}}$

Ejercicio 6.

Para averiguar las dos últimas cifras de los números 2019^{2019} y $2019^{2019^{2019}}$ vamos a ir calculando potencias sucesivas de 2019.

$$2019^1 = ...19$$

$$2019^2 = 2019 \cdot 2019 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \text{x} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \hline .. & .. & 1 & 7 & 1 \\ .. & .. & 1 & 9 & \\ \hline .. & .. & .. & 6 & 1 \end{array} \right\} = ...61$$

$$2019^3 = 2019 \cdot 2019^2 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \text{x} & .. & .. & 6 & 1 \\ \hline .. & .. & .. & 1 & 9 \\ .. & .. & .. & 4 & \\ \hline .. & .. & .. & 5 & 9 \end{array} \right\} = ...59$$

$$2019^4 = 2019 \cdot 2019^3 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \text{x} & .. & .. & 5 & 9 \\ \hline .. & .. & .. & 7 & 1 \\ .. & .. & .. & 5 & \\ \hline .. & .. & .. & 2 & 1 \end{array} \right\} = ...21$$

$$2019^5 = 2019 \cdot 2019^4 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \text{x} & .. & .. & 2 & 1 \\ \hline .. & .. & .. & 1 & 9 \\ .. & .. & .. & 8 & \\ \hline .. & .. & .. & 9 & 9 \end{array} \right\} = ...99$$

$$2019^6 = 2019 \cdot 2019^5 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \text{x} & .. & .. & 9 & 9 \\ \hline .. & .. & .. & 7 & 1 \\ .. & .. & .. & 1 & \\ \hline .. & .. & .. & 8 & 1 \end{array} \right\} = ...81$$

$$2019^7 = 2019 \cdot 2019^6 = \left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9 \\ \text{x} & .. & .. & 8 & 1 \\ \hline .. & .. & .. & 1 & 9 \\ .. & .. & .. & 2 & \\ \hline .. & .. & .. & 3 & 9 \end{array} \right\} = ...39$$

$$2019^8 = 2019\cdot 2019^7 = \left\{\begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9\\ x & .. & .. & 3 & 9\\ \hline .. & .. & .. & 7 & 1\\ .. & .. & .. & 7 & \\ \hline .. & .. & .. & 4 & 1\end{array}\right\} = ...41$$

$$2019^9 = 2019\cdot 2019^8 = \left\{\begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9\\ x & .. & .. & 4 & 1\\ \hline .. & .. & .. & 1 & 9\\ .. & .. & .. & 6 & \\ \hline .. & .. & .. & 7 & 9\end{array}\right\} = ...79$$

$$2019^{10} = 2019\cdot 2019^9 = \left\{\begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9\\ x & .. & .. & 7 & 9\\ \hline .. & .. & .. & 7 & 1\\ .. & .. & .. & 3 & \\ \hline .. & .. & .. & 0 & 1\end{array}\right\} = ...01$$

$$2019^{11} = 2019\cdot 2019^{10} = \left\{\begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9\\ x & .. & .. & 0 & 1\\ \hline .. & .. & .. & 1 & 9\\ .. & .. & .. & 0 & \\ \hline .. & .. & .. & 1 & 9\end{array}\right\} = ...19$$

Se repiten las dos últimas cifras. 2019^{11} acaba en las mismas cifras que 2019^1

$$2019^{12} = 2019\cdot 2019^{11} = \left\{\begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 1 & 9\\ x & .. & .. & 1 & 9\\ \hline .. & .. & .. & 7 & 1\\ .. & .. & .. & 9 & \\ \hline .. & .. & .. & 6 & 1\end{array}\right\} = ...61$$

Se repiten las dos últimas cifras. 2019^{12} acaba en las mimas cifras que 2019^2

Las 2 últimas cifras de las potencias de 2019 se repiten de forma cíclica, existiendo 10 valores distintos:

$$2019^1 = \ldots 19$$

$$2019^2 = \ldots 61$$

$$2019^3 = \ldots 59$$

$$2019^4 = \ldots 21$$

$$2019^5 = ...99$$

$$2019^6 = ...81$$

$$2019^7 = ...39$$

$$2019^8 = ...41$$

$$2019^9 = ...79$$

$$2019^{10} = ...01$$

Para saber cuáles son las 2 últimas cifras de 2019^{2019} dividimos el exponente por 10 y da de resto 9 (la última cifra del exponente), por lo que acaba con las mismas cifras que $2019^9 = ...79$.

$$2019^{2019} \text{ acaba en } 79$$

La potencia $2019^{2019^{2019}}$ tiene como exponente el número $2019^{2019} = ...79$ por lo que:

$2019^{2019^{2019}} = 2019^{....79} = 2019^{....9}$ que acaba con las mismas cifras que $2019^9 = ...79$.

$$2019^{2019^{2019}} \text{ acaba en } 79$$