UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) **[1,5 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 *y* A^4.

b) **[1 p.]** ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$?

CUESTIÓN A.2:

a) **[1,5 p.]** Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

b) **[0,5 p.]** Calcule dicha suma máxima.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

CUESTIÓN A.4:

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta ***r*** dada por

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{cases}$$

b) **[1,25 p.]** En caso de que la recta ***r*** sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta ***r*** corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0'15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0'05.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) **[0,75 p.]** Si un día tiene un fallo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) **[1,5 p.]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x < 0 \\ a + bsenx & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para los cuales la función ***f(x)*** es continua y derivable en ***x = 0***.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xe^x dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = xe^x$ que pasa por el punto de coordenadas (0, 1).

CUESTIÓN B.4:

Considere el punto $P = (0,\ 1,\ 2)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta ***r*** y pasa por el punto ***P***.

b) **[1,25 p.]** Calcule la distancia del punto ***P*** al plano $x + y + z = 5$.

CUESTIÓN B.5: En una peña del Atlético de Madrid, el 70% de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50% prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30% prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) **[1,5 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[1 p.]** ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$?

a) Calculemos

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+2\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot2+1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+4\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+4\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+4\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot2+1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+6\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+6\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+6\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot2+1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b)

$$A^1=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Se puede observar que:

$$A^1=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A.2:

a) **[1,5 p.]** Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

b) **[0,5 p.]** Calcule dicha suma máxima.

a) Descompongamos 10 en suma de 2 números ***x*** e ***y*** :

$$10 = x + y$$

Si un número es x, el otro es $y = 10 - x$

La función que debemos maximizar es:

$$S(x,y) = x + 2\ln y = x + 2\ln(10-x)$$

$$f(x) = x + 2\ln(10-x)$$

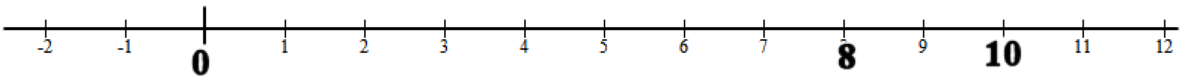
Para averiguar su máximo valor derivo la función y la igualo a 0

$$f'(x) = 1 + 2\frac{1}{10-x}\cdot(-1) = 1 - \frac{2}{10-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{10-x} = 0$$

$$1 = \frac{2}{10-x} \Rightarrow 10 - x = 2 \Rightarrow 10 - 2 = x$$

$$\boxed{x = 8}$$

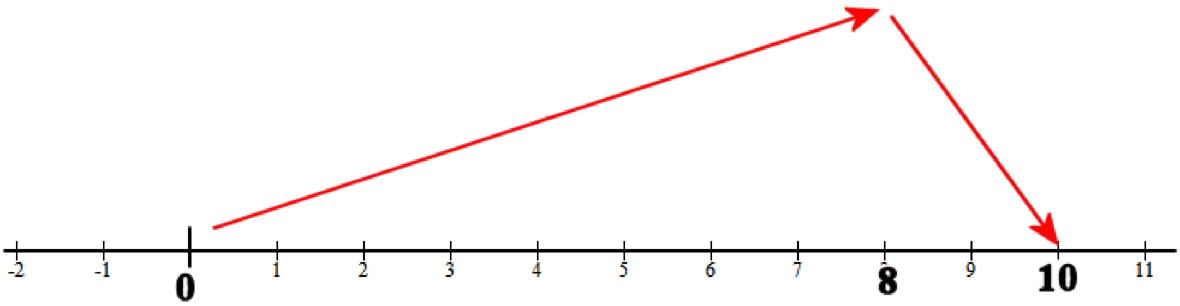


Sustituimos x =7 en la derivada

$$f'(7) = 1 - \frac{2}{10-7} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$$ Es creciente en el intervalo (0, 8)

Sustituimos x = 9 en la derivada

$$f'(9) = 1 - \frac{2}{10-9} = 1 - \frac{2}{1} = 1 - 2 = -1 < 0$$ Es decreciente en el intervalo (8, 10)



La función presenta un máximo en x= 8.

Los números buscados son 8 y 2. Con ellos se obtiene una suma máxima.

b) La suma máxima es $f(8) = 8 + 2\ln(10-8) = 8 + 2\ln 2 = \boxed{9{,}386}$.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

a) Realicemos un cambio de variable para el cálculo de $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2+1=t \\ 4xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{4x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{4\cancel{x}} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{4}\frac{2}{1}t^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{t} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C}$$

Otra forma de calcularlo es:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2+1=t \\ 4xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{4x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{4\cancel{x}} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{t} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C}$$

Otra forma de calcularlo es:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x^2+1}=t \\ 2x^2+1=t^2 \\ 4xdx = 2tdt \\ dx = \dfrac{tdt}{2x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{x}}{\cancel{t}}\frac{\cancel{t}dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C}$$

b) Para determinar el área debo calcular el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2, salvo que exista algún punto de corte con el eje OX entre estos valores. Comprobémoslo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} = 0$$

$$x = 0 \cdot \sqrt{2x^2+1}$$

$$x = 0$$

Como este valor está situado en el borde del intervalo el área pedida es:

$$Área = \left| \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx \right| = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1} \right]_0^2 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2^2+1} \right] - \left[\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 0^2+1} \right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1u^2$$

CUESTIÓN A.4:

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta ***r*** dada por

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{cases}$$

b) [1,25 p.] En caso de que la recta ***r*** sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta ***r*** corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

a) Su posición la determina la relación entre el vector director de la recta y el vector normal del plano. Determinemos estos vectores:

$$\pi: 3x-2y+z=3 \Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}=(3,-2,1)$$

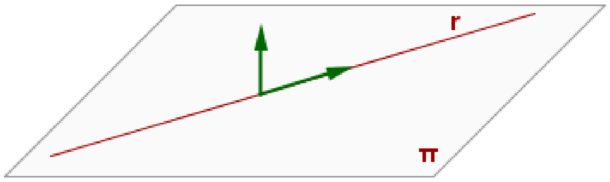
$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{cases} \Rightarrow$$ El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de cada plano que la define:

$$\vec{u}=(1,3,3);\quad \vec{v}=(0,1,2)\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=6i+k-(2j+3i)=3i-2j+k=(3,-2,1)$$

Los dos vectores son iguales. La recta es perpendicular al plano.

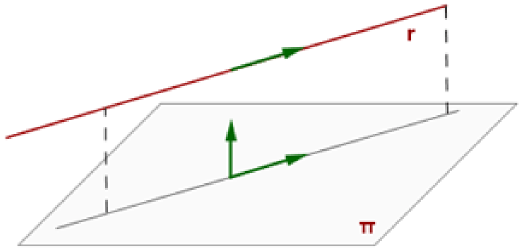
OTRA FORMA DE RAZONARLO:

Posibilidad 1 ¿Está la recta contenida en el plano?



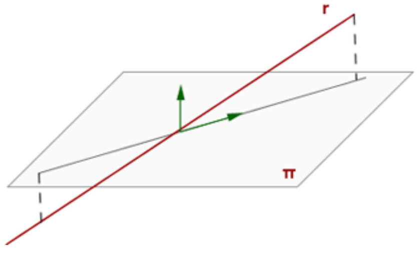
Deberían ser perpendiculares los vectores normal del plano y director de la recta y no lo son (son iguales)

Posibilidad 2 ¿Es la recta paralela al plano?



Deberían ser perpendiculares los vectores normal del plano y director de la recta y no lo son (son iguales)

Posibilidad 3 ¿Es la recta secante al plano?



Si, ya que los vectores normal y director son iguales y la recta es secante

b) Forman 90º ya que son iguales el vector normal del plano y el director de la recta. El punto de corte sale del sistema formado por la ecuación del plano y la recta:

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 3x-2y+z=3 \\ r:\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y+2z=1 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=3 \\ x+3y+3z=0 \\ y+2z=1 \end{array}\right\}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=3 \\ x+3y+3z=0 \\ y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{Fila 1ª - 3·Fila 2ª} \rightarrow \text{Fila 2ª} \\ \quad 3x-2y+z \quad =3 \\ \underline{-3x-9y-9z=0} \\ \qquad -11y-8z=3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=3 \\ -11y-8z=3 \\ y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Fila 2ª + 11·Fila 3ª} \rightarrow \text{Fila 3ª} \\ \quad -11y-8z=3 \\ \underline{\quad 11y+22z=11} \\ \qquad 14z=14 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=3 \\ -11y-8z=3 \\ 14z=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y+1=3 \\ -11y-8z=3 \\ \boxed{z=1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=2 \\ -11y-8\cdot 1=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y=2 \\ -11y-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y=2 \\ -11y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y=2 \\ \boxed{y=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+2=2 \Rightarrow$$

$$3x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

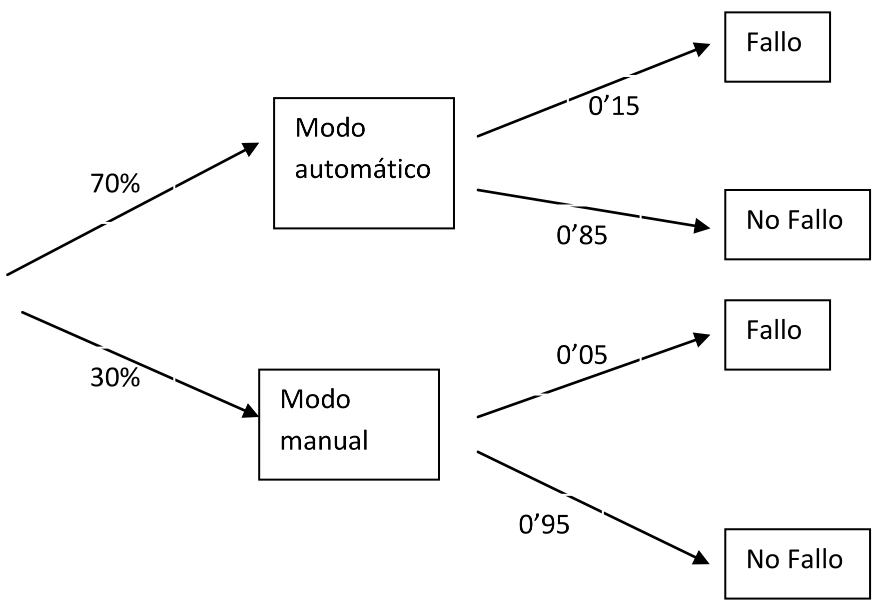
El punto de corte es A(0, -1, 1)

CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0’15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0’05.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) **[0,75 p.]** Si un día tiene un fallo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

Realicemos un árbol para aclarar los posibles resultados de este experimento aleatorio.



a)

$$\mathrm{P}\left(\text{No falla}\right)=\mathrm{P}\left(\text{Modo automático y no falla}\right)+\mathrm{P}\left(\text{Modo manual y no falla}\right)=$$

$$=0'7\cdot 0'85+0'3\cdot 0'95=\boxed{0'88}$$

b)

$$\mathrm{P}\left(\text{Modo manual /Fallo}\right)=\frac{P(\text{Modo manual }\cap\text{ Fallo})}{P(Fallo)}=\frac{0'3\cdot 0'05}{1-P(\text{No falla})}=\frac{0'015}{0'12}=\boxed{0'125}$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.
b) **[1,5 p.]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

a) **Por rangos.**
Calculemos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2-1+0-(1+0+0) = 0$$

El sistema no puede ser compatible determinado pues el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas.

Por Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - y + z = 4a \\ \underline{-x \quad -2z = -a^2} \\ -y - z = 4a - a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ -y - z = 4a - a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y + z = -4 \\ \underline{-y - z = 4a - a^2} \\ 0 = -4 + 4a - a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ 0 = -4 + 4a - a^2 \end{cases}$$

Este sistema equivalente al inicial no es compatible determinado, sea cual sea el valor de ***a***. O no tiene solución o las soluciones son infinitas.

b) **Por Gauss.** Hecho en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ 0 = -4 + 4a - a^2 \end{cases}$$

Si resolvemos la igualdad:

$$0 = -4 + 4a - a^2 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Distinguimos dos casos diferentes:

Primer caso. a = 2

$$\begin{cases} x - y + z = 8 \\ y + z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 8 \\ \boxed{y = -z - 4} \end{cases} \Rightarrow x + z + 4 + z = 8 \Rightarrow x + 2z = 4 \Rightarrow \boxed{x = 4 - 2z}$$

El sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y son:

$$\left.\begin{array}{l} x=4-2z \\ y=-z-4 \\ z=z \end{array}\right\}$$

$\boxed{\textbf{Segundo caso. a} \neq \textbf{2}}$

El sistema no tiene solución. $\boxed{\text{El sistema es incompatible}}$

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \quad x<0 \\ a+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para los cuales la función ***f(x)*** es continua y derivable en ***x = 0***.

Para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \quad x<0 \\ a+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ sea continua debe de serlo en x=0.

Deben cumplirse:

1º Exista la función en x=0. $f(0)=\text{a}+\text{b}\,\text{sen}\,0=\text{a}+\text{b}\cdot 0=\text{a}$. Lo cumple

2º Debe existir el $\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^0=1 \\ \lim_{x\to 0^+}(a+bsenx)=a+b\cdot 0=a \end{cases}$ Para ello debe ser $\boxed{\textbf{a = 1}}$

3º Deben ser iguales $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ Se cumple (al ser a=1)

La función queda:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & si \quad x<0 \\ 1+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{x} & si \quad x<0 \\ 1+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ sea derivable debe de serlo en x=0.

Debe de cumplirse que $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)$

Calculemos dichos límites:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(0+b\cos x)=b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1$$

Por lo que debe ser $\boxed{\textbf{b = 1}}$

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xe^x dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=xe^x$ que pasa por el punto de coordenadas (0, 1).

a)

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} Integramos\ por\ partes \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = \boxed{x \cdot e^x - e^x + C}$$

b)

La primitiva se ha calculado en el apartado anterior y

para que la función $F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$ pase por el punto $(0,1)$

debe cumplirse F(0)=1 $\Rightarrow 0 \cdot e^0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

$\boxed{\text{La primitiva pedida es } F(x) = x \cdot e^x - e^x + 2}$

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Considere el punto $P = (0,\ 1,\ 2)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta ***r*** y pasa por el punto ***P***.

b) **[1,25 p.]** Calcule la distancia del punto ***P*** al plano $x + y + z = 5$.

a) Si el plano debe ser perpendicular a la recta, entonces su vector normal debe ser el vector director de la recta. Para determinar este vector director multipliquemos los vectores normales de cada uno de los 2 planos que definen la recta.

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n_1} = (2,1,-1) \\ \vec{n_2} = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - j - 2k - (k + 2j + i) = -3j - 3k$$

$$\vec{v_r} = (0,-3,-3)$$

Simplificando el vector obtenido nos sirve como vector director de la recta ***r*** : $\vec{v_r} = (0,1,1)$

El plano pedido es $y + z + D = 0$. Como debe pasar por el punto $P = (0,\ 1,\ 2)$ entonces

$$1 + 2 + D = 0$$

$$D = -3$$

$\boxed{\text{El plano tiene ecuación } \quad y + z - 3 = 0}$

b) Con fórmula directa.

Utilizando la fórmula de distancia del punto P (0,1,2) al plano $x + y + z - 5 = 0$:

$$\text{Distancia}(P, \text{Plano}) = \left| \frac{0 + 1 + 2 - 5}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{1'15\, u^2}$$

Sin utilizar fórmula directa.

Calculemos la recta perpendicular al plano que pasa por P y después el punto Q de corte de la recta con el plano. La distancia del punto al plano es la distancia del punto P al punto Q.

El plano $x+y+z=5$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,1,1)$

La ecuación de la recta perpendicular al plano es :

$$\left.\begin{array}{l} x=0+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{array}\right\}$$

El punto Q de corte entre recta y plano se obtiene del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x=0+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \\ x+y+z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+1+\lambda+2+\lambda=5 \Rightarrow 3\lambda=2 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ y=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \\ z=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3} \end{array}\right\} Q=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$$

Distancia(P, Plano)=Distancia(P,Q)= $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=$

$$=\left|\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)-(0,1,2)\right|=\left|\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{1'15\,u^2}$$

CUESTIÓN B.5: En una peña del Atlético de Madrid, el 70% de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50% prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30% prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

Construyamos una tabla de contingencia con los porcentajes en negro de los datos y en rojo los obtenidos a partir de ellos:

	Torres se va	Torres se queda	
Griezmann se va	**10**	**20**	**30**
Griezmann se queda	**40**	**30**	**70**
	50	**50**	**100**

a)

$P(\textit{al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo})=$

$=1 - P(\textit{Ninguno juega en el equipo})=$

$=1-\frac{10}{100}=90\%$

b)

$$P\left(Ninguno\ juega\ en\ el\ equipo\right) = 10\%$$

c)

$$P\left(Solo\ juega\ en\ el\ equipo\ Fernando\ Torres\right) = P(Juega\ Torres \cap No\ \ juega\ Griezmann) = 20\%$$