UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad

Curso 2017/2018

Convocatoria: Julio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean I la matriz identidad de orden 2 y las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calcule, si existe, la inversa de A.
2. Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistemas

$$AX+BY=3I,$$
$$AX-BY=I,$$

2.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x)=2-\cos x-3x$$

(I) Determine, si existen, las asíntotas oblicuas de *f*.

(II) Calcule

$$\int f(x)\cos x dx.$$

(III) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.

Nota. Puede ser útil el teorema de Rolle.

3.- **(2 puntos)** El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

4.- **(3 puntos)** Considere las rectas $r:\begin{cases}x-y+2z=7\\ x-y-5z=-7\end{cases}$, $s:\begin{cases}x=3+2t\\ y=1+t\\ z=1\end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a *r*.

PROPUESTA B:

1.- (3 puntos)

(I) Determine el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(II) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$.

2.- (2 puntos)

(I) Halle, si existe, el valor de a para el cual

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$$

(II) Determina, si existe,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)',$$

Donde $\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2+12x+1}$

3.- **(2 puntos)** El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

4.- **(3 puntos)** Considere las rectas $r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x-y-5z=-7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a *r*.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean I la matriz identidad de orden 2 y las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calcule, si existe, la inversa de A.
2. Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistemas

$$AX+BY=3I,$$
$$AX-BY=I,$$

1. La inversa de A existe si su determinante es no nulo.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, por lo que existe su inversa.

La calculamos utilizando la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}+1 & -6\\ 0 & +1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Resolvamos el sistema de matrices

$$\left.\begin{array}{l}AX+BY=3I,\\ AX-BY=I,\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{lll}AX & -BY & =I\\ -AX & -BY & =-3I\\ \hline & -2BY & =-2I\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow -2BY=-2I\Rightarrow$$

$$BY=I\Rightarrow B^{-1}BY=B^{-1}\cdot I\Rightarrow \boxed{Y=B^{-1}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{lll}AX & -BY & =I\\ AX & +BY & =3I\\ \hline 2AX & & =4I\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow 2AX=4I\Rightarrow AX=2I\Rightarrow \boxed{X=2A^{-1}}$$

La inversa de A ya se calculó en el apartado 1, para poder continuar necesitamos calcular la inversa de B.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es: $\left.\begin{array}{l}X=2A^{-1}\\ Y=B^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}2 & -12\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$

2.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = 2 - \cos x - 3x$$

(I) Determine, si existen, las asíntotas oblicuas de *f*.

(II) Calcule

$$\int f(x)\cos x dx .$$

(III) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.

Nota. Puede ser útil el teorema de Rolle.

(I) Una asíntota oblicua es una recta de ecuación $y = mx + n$ donde $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x - 3x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 0 - 0 - 3 = -3$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \cos x - 3x + 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \cos x\right) = \text{No existe}$$

Este límite no existe ya que la función coseno no converge a nada en el infinito pues es una función periódica y oscilan sus valores. Al no existir este último límite la asíntota no existe.

(II)

$$\int f(x)\cos x dx = \int \left(2 - \cos x - 3x\right)\cos x dx = \int 2\cos x - \cos^2 x - 3x\cos x dx =$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \cos^2 x dx - \int 3x\cos x dx =$$

Calculo por separado cada una de estas tres integrales.

Primera integral: $\int 2\cos x dx = \boxed{2senx}$

Segunda integral:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos x \to du = -senxdx \\ dv = \cos x dx \to v = \int \cos x dx = senx \end{array} \right\} =$$

$$= \cos x senx - \int senx\left(-senx\right)dx = \cos x senx + \int sen^2 x dx = \cos x senx + \int 1 - \cos^2 x dx =$$

$$= \cos x senx + \int dx - \int \cos^2 x dx = \cos x senx + x - \int \cos^2 x dx$$

Hemos obtenido que $\int \cos^2 x dx = \cos x senx + x - \int \cos^2 x dx$ despejando:

$$\int \cos^2 x dx = \cos x senx + x - \int \cos^2 x dx \Rightarrow 2\int \cos^2 x dx = \cos x senx + x$$

$$\int \cos^2 x dx = \boxed{\frac{\cos x senx + x}{2}}$$

Tercera integral:

$$\int 3x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 3x \rightarrow du = 3 \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = senx \end{array} \right\} =$$

$$= 3xsenx - \int 3senxdx = \boxed{3xsenx + 3\cos x}$$

La integral inicial sería:

$$\int f(x)\cos x dx = \int 2\cos x dx - \int \cos^2 x dx - \int 3x\cos x dx =$$

$$= \boxed{2senx - \frac{\cos xsenx + x}{2} - 3xsenx - 3\cos x + C}$$

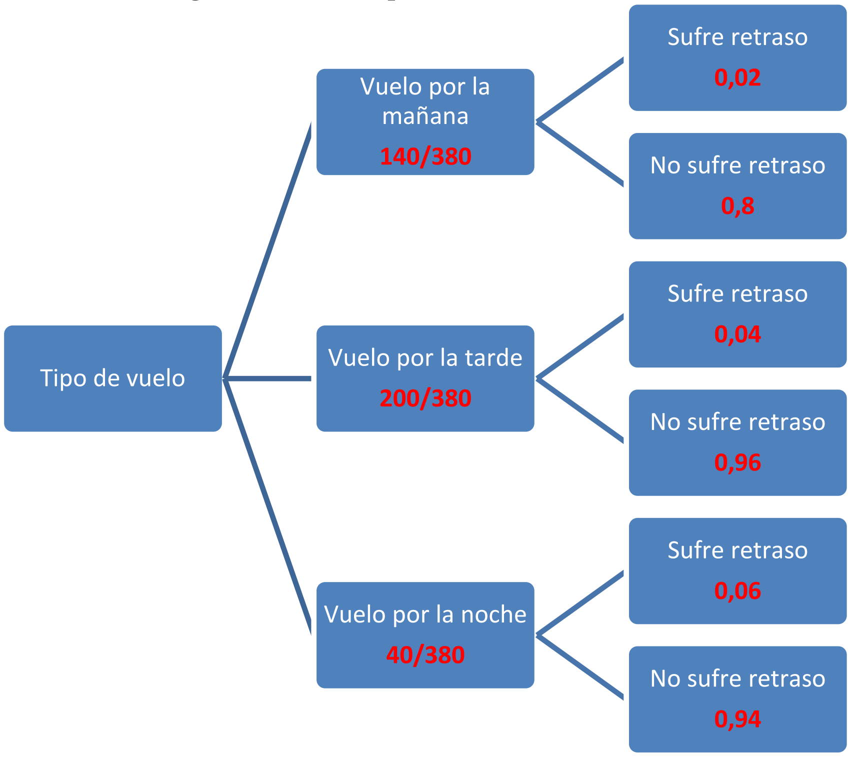
(III) Razonemos por reducción al absurdo.
Si existiesen dos puntos donde la función se anulase, llamémoslos a y b donde f(a) = f(b) = 0, por el teorema de Rolle debería existir un valor c en el que la derivada se anule, pero la derivada de la función es $f(x) = 2 - \cos x - 3x \Rightarrow f\,'(x) = senx - 3$. Esta expresión no se puede anular, ya que el seno toma valores entre –1 y 1, nunca alcanza el valor 3 necesario para anular la derivada.

3.- **(2 puntos)** El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

Realicemos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



(I)

$$P(\text{No se retrase un vuelo}) =$$

$$= P(\text{Vuelo es por la mañana}) \cdot P(\text{No se retrasa/El vuelo es por la mañana}) +$$

$$+ P(\text{Vuelo es por la tarde}) \cdot P(\text{No se retrasa/El vuelo es por la tarde}) +$$

$$+ P(\text{Vuelo es por la noche}) \cdot P(\text{No se retrasa/El vuelo es por la noche}) =$$

$$= \frac{140}{380} \cdot 0{,}98 + \frac{200}{380} \cdot 0{,}96 + \frac{40}{380} \cdot 0{,}94 = \boxed{0{,}965}$$

(II)

$$P(\text{Un vuelo sea de la tarde / es con retraso}) =$$

$$= \frac{P(\text{Un vuelo sea de la tarde y llegue con retraso})}{P(\text{Un vuelo llega con retraso})} =$$

$$= \frac{\frac{200}{380} \cdot 0{,}04}{\frac{140}{380} \cdot 0{,}02 + \frac{200}{380} \cdot 0{,}04 + \frac{40}{380} \cdot 0{,}06} = \frac{8}{2{,}8 + 8 + 2{,}4} = \frac{8}{13{,}2} = \boxed{0{,}6}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.
Con los datos del problema se puede construir la siguiente tabla de contingencia.

Vuelos	**Número**	**Con retraso**	**Sin retraso**
Mañana	140	(2 %) →2,8	137,2
Tarde	200	(4 %) →8	192
Noche	40	(6 %) →2,4	37,6
TOTAL	380	13,2	366,8

Atendiendo a los datos de la tabla:

(I) $P(\text{No se retrase un vuelo}) = \dfrac{366,8}{380} = \boxed{0,965}$

(II) $P(\text{Un vuelo sea de la tarde / es con retraso}) = \dfrac{8}{13,2} = \boxed{0,6}$

4.- **(3 puntos)** Considere las rectas $r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x-y-5z=-7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a *r*.

(I) Obtengamos la ecuación en paramétricas de la recta r.

$$r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x-y-5z=-7 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^{\text{a}}\text{ - Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & -y & -5z & =-7 \\ -x & +y & -2z & =-7 \\ \hline & & -7z & =-14 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ -7z=-14 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ \boxed{z=\dfrac{-14}{-7}=2} \end{cases} \Rightarrow x-y+4=7 \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow \boxed{x=3+y}$$

$$r:\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$$

El vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,0)$ y el vector director de s es $\overrightarrow{v_s}=(2,1,0)$

Estos vectores no tienen coordenadas proporcionales, los vectores no son paralelos y , por tanto, las rectas no son paralelas.

¿Son secantes o se cruzan?

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, si existe un punto de corte se cortan y en caso contrario, se cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases} \\ r:\begin{cases} x=3+t' \\ y=t' \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3+t'=3+2t \\ t'=1+t \\ 2=1 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución ya que una de las ecuaciones es imposible (1 = 2), por lo que las dos rectas no tienen ningún punto en común.

Como no son paralelas y no tienen puntos en común, las rectas **se cruzan**.

(II) La recta r tiene vector director $\overrightarrow{v_r}=(1,1,0)$ un vector $\vec{u}=(a,b,c)$ perpendicular a la recta debe ser ortogonal a este vector y por tanto su producto escalar debe ser 0.

$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{u}=(1,1,0)(a,b,c)=a+b=0 \Rightarrow b=-a$. Siendo c cualquier valor.

Los vectores perpendiculares a la recta r son $\vec{u}=(a,-a,c)$. Evidentemente hay infinitos vectores que cumplen esta condición.

PROPUESTA B:

1.- (3 puntos)

(I) Determine el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(II) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$.

(I) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 o menor.

¿La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3?

Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0+6-8-(0-6+4) = 0$$. Su rango no es 3.

¿La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2?

Tomemos un menor de orden 2, por ejemplo quitando la 3ª fila y la 3ª columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+3 = 3 \neq 0$$. El rango es 2

(II) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{En el primer determinante} \\ \text{hay dos filas iguales} \\ \text{Entonces el determinante vale 0} \end{array} \right\} =$$

$$= 0 - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si intercambiamos fila 1ª y fila 2ª} \\ \text{el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Sacamos factor común 2 en la 2ª fila}\} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Sacamos factor común 2 en la 3ª fila}\} = 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 = \boxed{8}$$

2.- (2 puntos)
(I) Halle, si existe, el valor de a para el cual

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$$

(II) Determina, si existe, $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$,

Donde $\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2+12x+1}$

(I)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)\left(\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}\right)^2-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+ax+1-\left(9x^2-6x+1\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{9x^2}+ax+1-\cancel{9x^2}+6x-1}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+6)x}{3x+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+6)x}{6x}=\frac{a+6}{6}$$

Por lo que $\frac{a+6}{6}=2\Rightarrow a+6=12\Rightarrow \boxed{a=6}$

(II) Calculemos la expresión de la derivada de la que debemos calcular su límite.

$$\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'=\frac{18x+12}{2\sqrt{9x^2+12x+1}}=\frac{9x+6}{\sqrt{9x^2+12x+1}}$$

El límite valdría

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'=\lim_{x\to\infty}\frac{9x+6}{\sqrt{9x^2+12x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{\sqrt{9x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{3x}=\boxed{3}$$

3.- **(2 puntos)** El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

Hecho en la propuesta A

4.- **(3 puntos)** Considere las rectas $r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x-y-5z=-7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a *r*.

Hecho en la propuesta A