UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad

Curso 2017/2018

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los vectores $\vec{u}=(-1,4,8)$ y $\vec{v}=(1,2,-2)$.

(I) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90º.

(II) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

2.- (3 puntos) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

1. ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?
2. ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?
3. Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70% de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo cuántos kilogramos debería producir?

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

3.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de a, las asíntotas de $f(x)$.

(II) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

4.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} cx+y-2z&=6,\\ cx-2y+z&=0,\\ -2x+y+cz&=-6. \end{aligned}$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4% de los casos que la mujer está realmente embarazada. Mientras que el test da positivo en el 5% de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

(I) El test dé positivo.

(II) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.

2.- (3 puntos) Sean el punto $P=(1,2,-2)$ y la recta $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

(I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta *r*.

(II) Determine el punto de *r* más próximo a P.

(III) Halle la recta *r´* simétrica de *r* respecto al punto P.

3.- **(2 puntos)** Sea

$$f(x)=xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de *a*, las asíntotas de *f(x)*.

(II) Halle el valor de *a* para que *f* tenga en *x = 1* un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

4.- **(3 puntos)** Sea el sistema de ecuaciones

$$cx+y-2z=6,$$
$$cx-2y+z=0,$$
$$-2x+y+cz=-6.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro *c*.

(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro *c* es 1.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los vectores $\vec{u}=(-1,4,8)$ y $\vec{v}=(1,2,-2)$.

(I) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90º.

(II) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

(I) El ángulo entre los vectores se obtiene a partir del producto escalar de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,4,8)(1,2,-2)=-1+8-16=-9\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\sqrt{1+16+64}\sqrt{1+4+4}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9=\sqrt{81}\sqrt{9}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{-9}{27}\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{-1}{3}$$

Al ser el coseno del ángulo negativo el ángulo es de más de 90º.

(II) Un vector perpendicular a ambos vectores es el producto vectorial de ambos, luego dividimos el vector por su módulo y conseguiremos que tenga módulo 1.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 4 & 8\end{vmatrix}=16i+2j+4k+2k-8j+8i=24i-6j+6k=(24,-6,6)$$

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{24^2+36+36}=\sqrt{648}=6\sqrt{18}=18\sqrt{2}$$

El vector unitario pedido es $\vec{w}=\left(\frac{24}{18\sqrt{2}},\frac{-6}{18\sqrt{2}},\frac{6}{18\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{-\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

2.- (3 puntos) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

1. ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?
2. ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?
3. Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70% de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo cuántos kilogramos debería producir?

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Sea X = Producción de un árbol. X = N(54,3; 6,5)

1.

$$P(X>57)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-54,3}{6,5}>\frac{57-54,3}{6,5}\right)=P(Z>0,4153)=$$

$$=1-P(Z<0,4153)=1-\frac{0,6591+0,6628}{2}=1-0,66095=0,33905$$

El porcentaje es del 33,9% de los árboles

2.

$$P(50<X<57)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{50-54,3}{6,5}<\frac{X-54,3}{6,5}<\frac{57-54,3}{6,5}\right)=$$

$$=P(-0,6615<Z<0,4153)=P(Z<0,4153)-P(Z<-0,6615)=$$

$$=0,66095-P(Z>0,6615)=0,66095-\left(1-P(Z<0,6615)\right)=$$

$$=0,66095-(1-0,7454)=0,40635$$

El porcentaje es del 40%.

3.

Si llamamos p a la producción de dicho árbol, debe cumplirse que:

$$P(X<p)=0,7\Rightarrow P\left(\frac{X-54,3}{6,5}<\frac{p-54,3}{6,5}\right)=0,7$$

$$P\left(Z<\frac{p-54,3}{6,5}\right)=0,7$$

Como ese valor p debe estar por encima de la media (>50%), buscamos en la tabla 0,7 y

$$\frac{p-54,3}{6,5}=\frac{0,52+0,53}{2}\Rightarrow p-54,3=3,4125\Rightarrow p=57,7125$$

Debe producir a lo sumo 57,7 Kilos de fruta.

3.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de *a*, las asíntotas de *f(x)*.
(II) Halle el valor de *a* para que *f* tenga en *x = 1* un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

(I) **Asíntota vertical**. $x = m$

Como $f(x) = xe^{-ax} = \frac{x}{e^{ax}}$ su dominio es todo R, ya que el denominador nunca se anula.
No existen asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = n$
Distinguimos tres casos:

Si a > 0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-ax} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a\cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-ax} = \infty$$

Si $a \neq 0$ la asíntota horizontal es $y = 0$, solo en la rama de x > 0.

Si $a = 0$ no hay asíntota horizontal. Ya que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{0} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$
Si a < 0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-ax} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-ax} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a\cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$. Solo en la rama de x < 0

Asíntota oblicua no hay.
Si $a = 0$ la función es $f(x) = xe^{-ax} = x$ que es una recta y no tiene asíntotas.
Si a > 0 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-ax} = \infty$, veamos si hay oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-ax}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-ax} = e^{+\infty} = \infty$$ No hay asíntota oblicua

Si a < 0 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-ax} = \infty$, veamos si hay oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-ax}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = e^{+\infty} = \infty$$ No hay asíntota oblicua

(II) Para que *f* tenga en *x = 1* un extremo relativo debe anularse la derivada en *x = 1*.

$$f(x) = xe^{-ax} \Rightarrow f'(x) = e^{-ax} - axe^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax)$$

$$f'(1) = e^{-a}(1 - a)$$

Para que se anule la expresión debe ser $a = 1$.
Para saber si es máximo o mínimo, vemos el signo de la derivada segunda en x = 1.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}\left(-2+x\right)$$

$$f''(1) = e^{-1}\left(-2+1\right) = -\frac{1}{e} < 0$$

Entonces en x = 1 hay un máximo.

4.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$cx + y - 2z = 6,$$
$$cx - 2y + z = 0,$$
$$-2x + y + cz = -6.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro *c*.

(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro *c* es 1.

(I) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{vmatrix} = -2c^2 - 2 - 2c + 8 - c^2 - c = -3c^2 - 3c + 6$$

Si igualamos a cero el determinante

$$|A| = 0 \Rightarrow -3c^2 - 3c + 6 = 0 \Rightarrow c^2 + c - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos distintos.

CASO 1. $c \neq 1 \text{ y } c \neq -2$

En este caso el rango de la matriz A es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $c = 1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 6, \\ x - 2y + z = 0, \\ -2x + y + z = -6. \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª}} \\ x & -2y & +z & = 0 \\ -x & -y & +2z & = -6 \\ \hline & -3y & +3z & = -6 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{rrrr} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación 3ª + 2 · Ecuación 1ª}} \\ -2x & +y & +z & = -6 \\ 2x & +2y & -4z & = 12 \\ \hline & 3y & -3z & = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \quad + y - 2z = 6 \\ -3y + 3z = -6 \\ +3y - 3z = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrr} \multicolumn{3}{l}{\text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª}} \\ 3y & -3z & = 6 \\ -3y & +3z & = -6 \\ \hline & 0 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \quad + y - 2z = 6 \\ -3y + 3z = -6 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Caso 3. $c = -2$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y - 2z = 6, \\ -2x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 2z = -6. \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix} \text{ y } A/B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2 & 6\\ -2 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -2 & -6\end{pmatrix}$$

El rango de A no es 3 pues $|A|=0$.

¿El rango de A es 2?

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª fila y 3ª columna es no nulo.

$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$. El rango de A es 2.

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor resultante de quitar la 1ª columna. Veamos si es nulo o no.

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 6\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -6\end{vmatrix}=-6+0+24-6+24+0=36\neq 0$. El rango de A/B es 3.

El sistema es incompatible. No tiene solución

(II) Para $c=1$ el sistema queda:

$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=6,\\ x-2y+z=0,\\ -2x+y+z=-6.\end{array}\right\}$ que ya hemos reducido en el apartado anterior al sistema equivalente:

$\left.\begin{array}{r} x \quad +y-2z=6\\ -3y+3z=-6\\ 0=0\end{array}\right\}$ Resolvamos este último sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=6\\ -3y+3z=-6\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-2z=6\\ y-z=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y-2z=6\\ \boxed{y=z+2}\end{array}\right\}\Rightarrow x+z+2-2z=6\Rightarrow \boxed{x=z+4}$$

El sistema tiene solución $x=4+t;\ y=2+t;\ z=t$

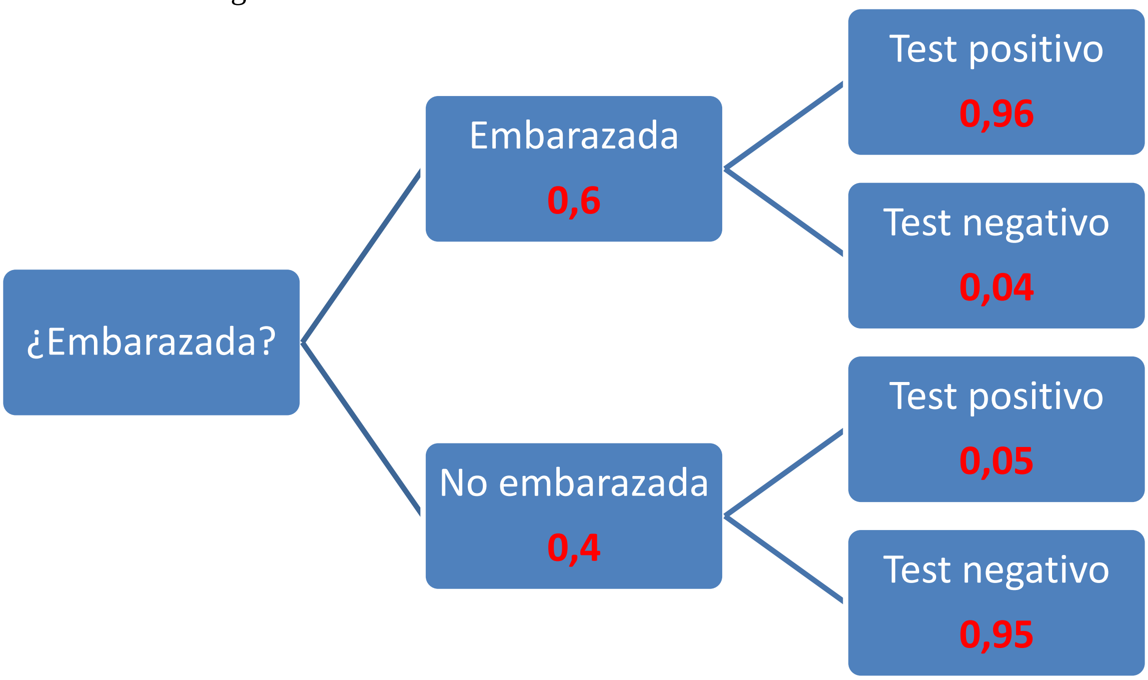
PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4% de los casos que la mujer está realmente embarazada. Mientras que el test da positivo en el 5% de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

(I) El test dé positivo.

(II) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.

Realizamos un diagrama de árbol



Atendiendo a los datos que aparecen en el árbol.

(I)

P(Test postivo) = P(Esté embarazada) · P(Test positivo / Está embarazada) + P(No esté embarazada) · P(Test positivo / No está embarazada) = 0,6 · 0,96 + 0,4 · 0,05 = 0,596

(II)

$$P\left(\text{Esté embarazada / Test positivo}\right)=\frac{P\left(\text{Esté embarazada y test positivo}\right)}{P\left(\text{Test positivo}\right)}=\frac{0,6\cdot 0,96}{0,596}=0,966$$

2.- (3 puntos) Sean el punto $P=(1,2,-2)$ y la recta $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

(I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta *r*.
(II) Determine el punto de *r* más próximo a P.
(III) Halle la recta *r´* simétrica de *r* respecto al punto P.

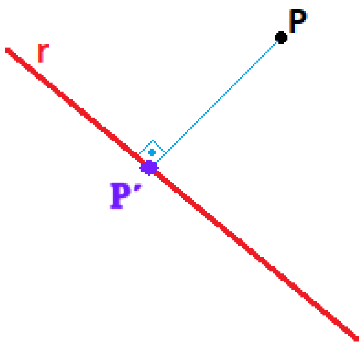
(I) Si el plano es perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta $\vec{v_r}=(-1,1,2)$. El plano tiene ecuación $\pi \equiv -x+y+2z+D=0$.

Como además pasa por el punto $P=(1,2,-2)$ se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -x+y+2z+D=0 \\ \text{Pasa por } P=(1,2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow -1+2-4+D=0 \Rightarrow D=3$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv -x+y+2z+3=0$.

(II) Nos piden hallar el punto P´ del dibujo.

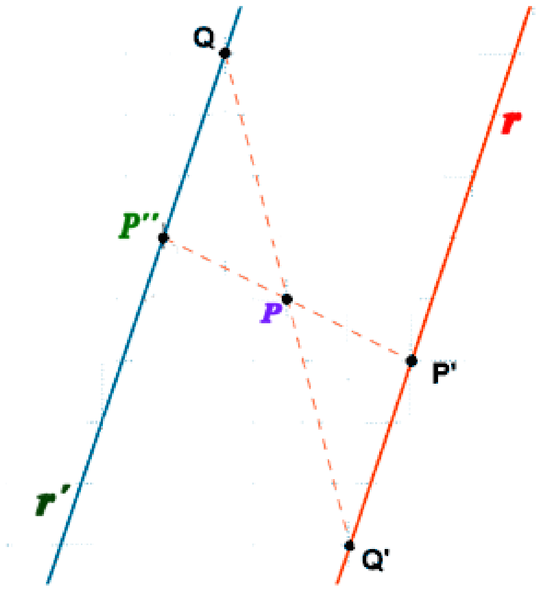


Determino el plano perpendicular a r que pasa por P (hallado en el apartado anterior) y luego P´ es el punto de corte de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -x+y+2z+3=0 \\ r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda+1+\lambda+4\lambda+3=0 \Rightarrow 6\lambda=-2$$

$$\lambda=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3} \\ y=1+\lambda=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ z=2\lambda=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P´\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}$$

(III) Nos piden hallar la recta r´ del dibujo:



Para ello solo falta hallar el punto P´´ de la recta r´. Su vector director es el mismo de r.

$P=(1,2,-2)$ es el punto medio del segmento de extremos $P´\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ y $P´´(a,b,c)$.

Entonces:

$$P=\frac{P´+P´´}{2}\Rightarrow(1,2,-2)=\frac{\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow(2,4,-4)=\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)+(a,b,c)$$

$$(a,b,c)=(2,4,-4)-\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=\left(2-\frac{7}{3},4-\frac{2}{3},-4+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{10}{3},-\frac{10}{3}\right)$$

La recta tiene ecuación:

$$r´:\begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\lambda \\ y=\frac{10}{3}+\lambda \\ z=-\frac{10}{3}+2\lambda \end{cases}$$

3.- **(2 puntos)** Sea

$$f(x) = xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de *a*, las asíntotas de *f(x)*.
(II) Halle el valor de *a* para que *f* tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

Hecho en la propuesta A

4.- **(3 puntos)** Sea el sistema de ecuaciones

$$cx + y - 2z = 6,$$
$$cx - 2y + z = 0,$$
$$-2x + y + cz = -6.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro *c*.
(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro *c* es 1.

Hecho en la propuesta A