



Modelo de examen

MATERIA: *MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*

El examen consta de 4 preguntas, cada una de ellas con dos opciones A y B. El alumno o alumna debe elegir cuatro cualquiera de las ocho preguntas y responder **razonadamente** a todos los apartados de dichas preguntas.

1A. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- [1 punto] Si $A - B \cdot C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 - [1,5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 2$.
-

1B. Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros, y también se exige que los extranjeros sean, por lo menos, un 10% del total de personas entrevistadas.

- [1,75 puntos] ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían ser entrevistados 1000 españoles?
 - [0,75 puntos] Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?
-

2A. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio de una empresa y el producto vendido, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en miles de euros, si se han vendido x toneladas de producto ese mes. Si un mes se venden como mucho 10 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es de $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800$ miles de euros. Si se venden más de 10 toneladas, el beneficio mensual se considera que es constante e igual a 1805000 euros.

- [0,25 puntos] Obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x .
 - [0,5 puntos] ¿Es el beneficio una función continua de la cantidad de producto vendido?
 - [1 punto] Estudia y representa gráficamente la función f .
 - [0,75 puntos] ¿Cuál es el beneficio mensual mínimo? ¿Puede llegar algún mes a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros?
-

2B. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- [0,5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
 - [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.
-

3A. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han comprado camisetas de recuerdo y que un cuarto de ellos han comprado sudaderas. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han comprado tanto camisetas como sudaderas.

- a) [1,25 puntos] Si un estudiante elegido al azar ha comprado sudaderas, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado camisetas?
 - b) [1,25 puntos] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya comprado ni camisetas ni sudaderas?
-

3B. De los turistas que visitaron Asturias el año pasado, el 5 % eran españoles y viajaban en avión. Además se sabe que un 20 % eran extranjeros y que el 25 % de los que viajaron en avión eran españoles.

- a) [1,25 puntos] Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?
 - b) [1,25 puntos] Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?
-

4A. Tras poner en marcha unos programas de prevención de tabaquismo en la universidad, se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria, la proporción actual de fumadores en la universidad.

- a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de fumadores en la universidad a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,02 y un nivel de confianza del 90 %?
- b) [1,5 puntos] Si se toma una muestra aleatoria de 2000 universitarios, de los que se obtiene que 180 son fumadores, obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de fumadores en la universidad.

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

4B. En un estudio sobre el gasto diario por turista en una determinada región, se tomó una muestra aleatoria de 3600 turistas, para los que el gasto total en un día, entre todos, había sido de 244800 euros. Suponiendo que el gasto diario sigue una distribución normal con desviación típica 40, se pide:

- a) [1,5 puntos] Construir un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse el verdadero gasto medio diario a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 euro y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)



Modelo de criterios específicos de corrección del modelo de examen

MATERIA: *MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*

Los códigos utilizados a la hora de detallar los estándares evaluados de cada bloque se corresponden con los utilizados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 03/01/2015) a la hora de detallar los estándares de aprendizaje evaluables.

1A. a)	<ul style="list-style-type: none">- Bloques de contenidos:<ul style="list-style-type: none">Bloque 2 de Números y álgebra.Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.- Calificación máxima otorgada: 1 puntos.- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:<ul style="list-style-type: none">Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1Estándares del bloque 2: 1.2, 1.3
1A. b)	<ul style="list-style-type: none">- Bloques de contenidos:<ul style="list-style-type: none">Bloque 2 de Números y álgebra.Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.- Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos.- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %.- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:<ul style="list-style-type: none">Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2Estándares del bloque 2: 1.3, 2.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Discutir del sistema: 0,5. Contestar a cada pregunta: 0,25. Resolver el sistema: 0,5.	
1B. a)	<ul style="list-style-type: none">- Bloques de contenidos:<ul style="list-style-type: none">Bloque 2 de Números y álgebra.Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.- Calificación máxima otorgada: 1,75 puntos.- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 17,5 %.- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:<ul style="list-style-type: none">Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 7.2, 7.3, 7.4Estándares del bloque 2: 2.1, 2.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Plantear las inecuaciones: 0,75. Representar la región factible: 0,75. Cuestión: 0,25.	
1B. b)	<ul style="list-style-type: none">- Bloques de contenidos:<ul style="list-style-type: none">Bloque 2 de Números y álgebra.Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.- Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos.- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5 %.- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:<ul style="list-style-type: none">Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 7.2, 7.3, 7.4Estándares del bloque 2: 2.1, 2.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Primera cuestión: 0,5. Segunda cuestión: 0,25.	

2A. a)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 2,5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 7.2, 7.3 Estándares del bloque 3: 1.1
---------------	--

2A. b)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.3, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 3: 1.1, 1.3
---------------	---

2A. c)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 7.3 Estándares del bloque 3: 1.1, 2.1
---------------	---

Criterios específicos de corrección de la pregunta: Estudiar la función: 0,75. Representarla en base al estudio: 0,25.

2A. d)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.3, 3.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 3: 1.1, 2.1, 2.2
---------------	--

Criterios específicos de corrección de la pregunta: Cada cuestión: 0,25.

2B. a)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2 Estándares del bloque 3: 3.1
---------------	--

2B. b)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 2 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 20%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2 Estándares del bloque 3: 1.2, 2.1, 3.2
---------------	---

Criterios específicos de corrección de la pregunta: Estudiar la función: 0,75. Representarla en base al estudio: 0,25. Área: 1.

3A. a)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.3, 3.1, 3.2, 7.3 Estándares del bloque 4: 1.1, 1.2, 1.3
---------------	--

3A. b)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.,3 3.1, 3.2, 7.3 Estándares del bloque 4: 1.1, 1.2
---------------	---

3B. a)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 4: 2.4, 3.1
---------------	---

3B. b)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 4: 2.6
---------------	--

4A. a)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 4: 2.6
---------------	--

4A. b)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 4: 2.5, 3.1
---------------	--

4B. a)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 1.1, 2.1, 3.1, 3.2, 3.3, 5.2, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 4: 2.4, 3.1
---------------	---

4B. b)	<ul style="list-style-type: none"> - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10%. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 1.1, 2.1, 3.1, 3.2, 3.3, 5.2, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 Estándares del bloque 4: 2.6
---------------	---



Modelo de examen RESUELTO

MATERIA: *MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*

Las preguntas se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

1A. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A - B \cdot C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [1,5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 2$.

Solución:

- a) Puesto que

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} my - 1 \\ mx - 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B \cdot C = \begin{pmatrix} x - my + 1 \\ y - mx - 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A - B \cdot C = D \Leftrightarrow \begin{cases} x - my = -1 \\ -mx + y = 1 \end{cases}$$

- b) La discusión de este sistema es hecha habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

▪ **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ 0 & 1 - m^2 & 1 - m \end{array} \right)$$

Como $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ se tiene que:

- Si $m = -1$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0x + 0y = 2$), con lo que el sistema es incompatible
- Si $m = 1$, entonces la última fila es $(0 \ 0 \mid 0)$, por lo que el sistema es compatible indeterminado.
- En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

▪ **Rouché-Fröbenius.** Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ -m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

se tiene que:

- Para $m = -1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A') = 2 \neq \text{ran}(A) = 1,$$

por lo que el sistema es incompatible.

- Para $m = 1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A') = \text{ran}(A) = 1,$$

el sistema es compatible indeterminado.

- Si $m \neq \pm 1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $\text{ran}(A) = 2$ y por tanto $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ$ incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = -1$	<i>S.I.</i>
$m = 1$	<i>S.C.I.</i>
$m \neq \pm 1$	<i>S.C.D.</i>

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq -1$ y dicha solución es única si además $m \neq 1$.

Si $m = 2$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss.** Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 2$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -3y = -1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\begin{cases} y = 1/3 \\ x = -1/3 \end{cases}$$

- **Método de Cramer.** Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 1 - m^2$, con lo que si $m = 2$ se tiene que $|A| = -3$.

Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{-3} = -1/3, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-1}{-3} = 1/3.$$

Evidentemente, cualquier otro método usado que haya sido debidamente justificado, será admitido como válido.

1B. Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros, y también se exige que los extranjeros sean, por lo menos, un 10% del total de personas entrevistadas.

- [1,75 puntos]** ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían ser entrevistados 1000 españoles?
- [0,75 puntos]** Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

Solución:

- a) Si representamos por x e y el número de españoles y extranjeros entrevistados, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+y \geq 2300 \\ y \leq 1000 \\ y \geq 0,1(x+y) \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 2300 \\ y \leq 1000 \\ x-9y \leq 0 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la Figura 1. Los extremos de dicho recinto son $A = (1300, 1000)$, $B = (2070, 230)$ y $C = (9000, 1000)$.

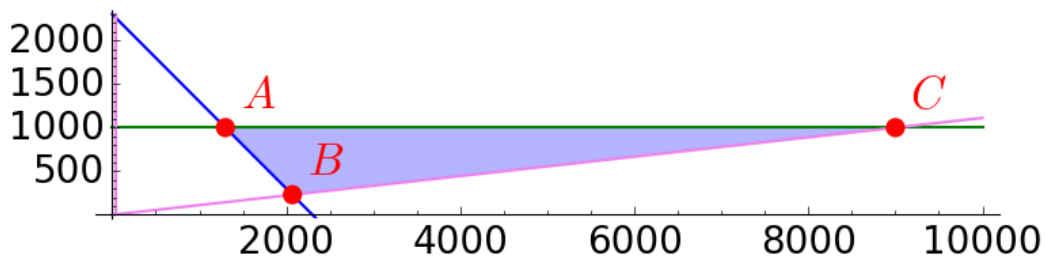


Figura 1: Región factible.

No podrían ser entrevistados 1000 españoles, puesto que el punto $(1000, y)$ no pertenece a la región factible para ningún valor de $y \in [0, \infty)$.

- b) El coste de la encuesta es $6(x+y)$, puesto que cada encuesta cuesta 6 euros y el número de personas encuestadas es $x+y$. Así, queremos maximizar la función objetivo $z = 6(x+y)$ sujeto a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{aligned} z(A) &= 13800 \text{ euros} \\ z(B) &= 13800 \text{ euros} \\ z(C) &= 60000 \text{ euros} \end{aligned}$$

por lo que el coste máximo se alcanza si se entrevistan a 9000 españoles y 1000 extranjeros, siendo dicho coste de 60000 euros.

2A. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio de una empresa y el producto vendido, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en miles de euros, si se han vendido x toneladas de producto ese mes. Si un mes se venden como mucho 10 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es de $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800$ miles de euros. Si se venden más de 10 toneladas, el beneficio mensual se considera que es constante e igual a 1805000 euros.

- a) **[0,25 puntos]** Obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x .
- b) **[0,5 puntos]** ¿Es el beneficio una función continua de la cantidad de producto vendido?
- c) **[1 punto]** Estudia y representa gráficamente la función f .
- d) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es el beneficio mensual mínimo? ¿Puede llegar algún mes a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros?

Solución:

- a) El beneficio mensual de una empresa (f), en miles de euros, se relaciona con las toneladas de producto vendido (x) tal como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 1805 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

- b) f es una función continua en $(0, 10)$ y en $(10, \infty)$, por estar definida por funciones continuas. Queda pues por estudiar la continuidad de f en $x = 10$:

- La función está definida en 10, siendo $f(10) = 10 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 10^2}{4} + 1800 = 1775$.
- Como

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 1775 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} 1805 = 1805$$

la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha, pero ambos no coinciden, con lo que no existe el límite en $x = 10$.

De todo lo anterior se deduce que f es continua en $(0, 10) \cup (10, \infty)$.

- c) El dominio de definición de f es el intervalo $(0, \infty)$.

Como $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 40x + 7200 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 1540 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{8^2 - 4(-1)1540}}{-2}$, es decir, $x = -31,45$ o $x = 47,45$. Pero como ninguno de estos dos valores pertenecen al intervalo $(0, 10]$, se puede decir que f no se anula en ese intervalo. Tampoco lo hace en $(10, \infty)$, puesto que toma el valor constante $1805 > 0$. De lo anterior se deduce que la función no corta el eje de abscisas.

Además hemos visto en el apartado anterior que es discontinua en $x = 10$.

En cuanto a las asíntotas, tiene sentido calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1805 = 1805.$$

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x) = 10 - \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Como $f'(2) = 5 > 0$, f es creciente en el intervalo $(0, 4)$; por otro lado, como $f'(6) = -5 < 0$, f es decreciente en el intervalo $(4, 10)$.
- En el segundo trozo, es una constante ($f'(x) = 0, \forall x \in (10, \infty)$).

Así pues la función crece hasta el 4 y decrece a partir de él hasta el 10, donde pasa a ser constante.

Por otro lado se tiene que $f(4) = 1820$ y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1800$.

En cuanto a la derivada segunda, como en el primer trozo $f''(x) = -\frac{5}{2}$, se tiene que $f''(4) = -\frac{5}{2} < 0$, con lo que 4 es un máximo relativo.

Además, para los intervalos de concavidad:

- En el primer trozo, $f''(x) = -\frac{5}{2} < 0, \forall x \in (0, 10)$, con lo que es cóncava hacia abajo en ese intervalo.
- En el segundo trozo, como ya se comentó, es constante.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la Figura 2.

- d) El mínimo absoluto se tiene en el punto $x = 10$, con lo que el beneficio mensual mínimo se alcanza si se venden 10 toneladas de producto y dicho beneficio es de 1775 miles de euros.

Como se puede observar en el estudio de la función hecho en el apartado anterior, $x = 4$ es un máximo absoluto por lo que el valor máximo de f se alcanza en el punto $x = 4$ y es de 1820 miles de euros, con lo que no puede llegar a ser de 1900 miles de euros.

De 1815 sí podría ser, alcanzándose este valor cuando se hayan vendido 2 o 6 toneladas de producto, puesto que $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 1815 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = 6$.

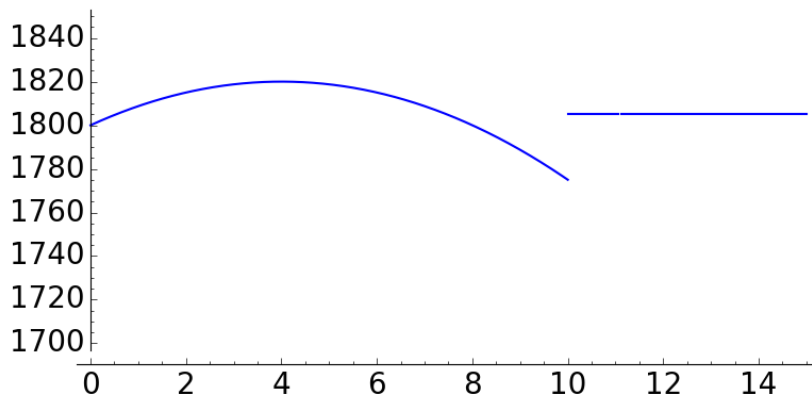


Figura 2: Representación gráfica de $f(x)$.

2B. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
- b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

Solución:

a) Como $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, entonces $F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + C$, con lo que $F(1) = 17 + C = 20 \Leftrightarrow C = 3$ y $F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + 3$.

b) Como $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = \frac{9x - 18 - x^2}{x^2}$, el dominio de f es $\mathbb{R} - \{0\}$, puesto que el único punto donde no está definida es donde se anula el denominador, es decir, $x^2 = 0$.

Como $f(-x) = -\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, con lo que f no es una función simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

La función f no está definida en el punto $x = 0$, con lo que no corta al eje de ordenadas en ningún punto. Además como $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9x - 18 = -(x-3)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = 6$, se tiene que f corta al eje de abscisas en los puntos $(3, 0)$ y $(6, 0)$.

En cuanto a las asíntotas verticales tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -\infty.$$

f tiene en $y = -1$ una asíntota horizontal tanto por la derecha como por la izquierda, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = -1.$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-9}{x^2} + \frac{36}{x^3} = \frac{-9x + 36}{x^3} = 0, \Leftrightarrow -9x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (0, 4)$, se tiene que f crece en $(0, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = \frac{18}{x^3} - \frac{108}{x^4} = \frac{18x - 108}{x^4}$, con lo que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 108/18 = 6$ y como $f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$ y $f''(x) > 0$ si $x \in (6, \infty)$, se tiene que f es siempre cóncava hacia arriba (convexa) en el intervalo $(6, \infty)$ y cóncava hacia abajo (cóncava) en $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$.

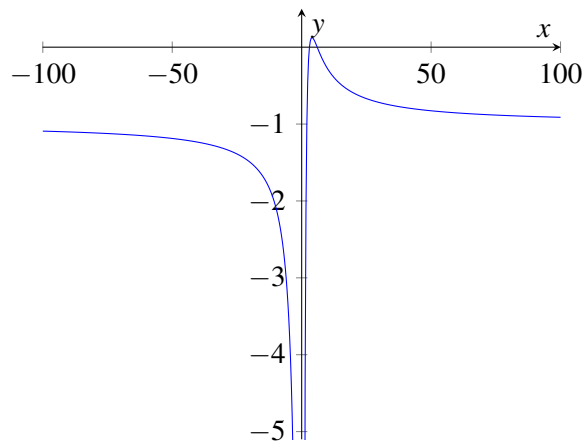


Figura 3: Representación gráfica de f .

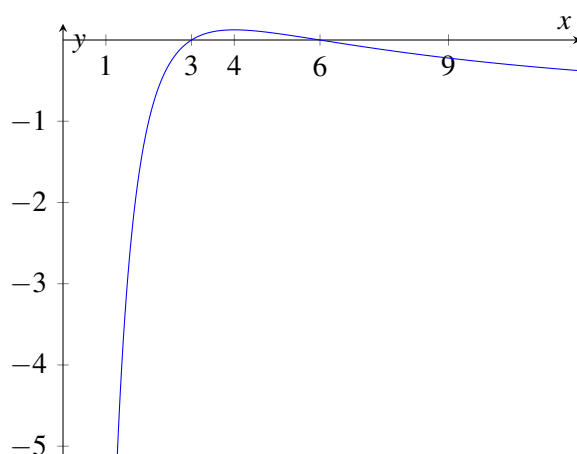


Figura 4: Representación gráfica de f entre 1 y 12.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

Para obtener el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$, vamos a comenzar ampliando esta zona en la figura 3. Al hacer esto, obtenemos la representación de la figura 4.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$ es igual a:

$$\left| \int_1^3 f(x) dx \right| + \left| \int_3^6 f(x) dx \right| + \left| \int_6^{12} f(x) dx \right| = |F(3) - F(1)| + |F(6) - F(3)| + |F(12) - F(6)| =$$

$$|15,88751 - 20| + |16,12584 - 15,88751| + |14,86416 - 16,12584| = 5,6125.$$

3A. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han comprado camisetas de recuerdo y que un cuarto de ellos han comprado sudaderas. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han comprado tanto camisetas como sudaderas.

- a) [1,25 puntos] Si un estudiante elegido al azar ha comprado sudaderas, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado camisetas?
- b) [1,25 puntos] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya comprado ni camisetas ni sudaderas?

Solución: Si denotamos por C el suceso «el estudiante ha comprado camisetas» y por S el suceso «el estudiante ha comprado sudaderas», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(C) = 3/5 = 0,6$$

$$P(S) = 1/4 = 0,25$$

$$P(C \cap S) = 0,2$$

$$a) P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0,2}{0,25} = 0,8.$$

$$b) P(\overline{C} \cap \overline{S}) = P(\overline{C \cup S}) = 1 - P(C \cup S) = 1 - [P(C) + P(S) - P(C \cap S)] = 1 - [0,6 + 0,25 - 0,2] = 0,35$$

3B. De los turistas que visitaron Asturias el año pasado, el 5% eran españoles y viajaban en avión. Además se sabe que un 20% eran extranjeros y que el 25% de los que viajaron en avión eran españoles.

- a) **[1,25 puntos]** Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?
- b) **[1,25 puntos]** Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

Solución: Si denotamos por E el suceso «el turista es español» y por A el suceso «el turista viaja en avión», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E \cap A) = 0,05$$

$$P(\overline{E}) = 0,2$$

$$P(E/A) = 0,25$$

- a) Como $P(E/A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}$, se tiene que $P(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E/A)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$, con lo que la probabilidad de que un turista elegido al azar haya viajado en avión es 0,2.
- b) Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, la probabilidad de que haya viajado en avión es $P(A/\overline{E})$ que por definición de probabilidad condicionada se puede calcular como

$$P(A/\overline{E}) = \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})}$$

Pero como por el teorema de la probabilidad total se tiene que $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \overline{E})$, entonces $P(A \cap \overline{E}) = P(A) - P(A \cap E) = 0,2 - 0,05 = 0,15$, entonces la probabilidad pedida es

$$P(A/\overline{E}) = \frac{0,15}{0,2} = 0,75,$$

es decir, si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, la probabilidad de que haya viajado en avión es 0,75.

4A. Tras poner en marcha unos programas de prevención de tabaquismo en la universidad, se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria, la proporción actual de fumadores en la universidad.

- a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de fumadores en la universidad a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,02 y un nivel de confianza del 90%?
- b) **[1,5 puntos]** Si se toma una muestra aleatoria de 2000 universitarios, de los que se obtiene que 180 son fumadores, obtén, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de fumadores en la universidad.

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:

- a) Al estimar la proporción poblacional de fumadores en la universidad (p), el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon} \right)^2$$

donde ε representa el error de estimación. El error de estimación viene dado por $\varepsilon \leq 0,02$, pero el valor de la proporción poblacional p no es conocido, de hecho es el valor que queremos estimar. En ese caso, se considera el valor que maximiza la desviación típica y, por tanto, el error de estimación, es decir, $p = 0,5$.

Por otro lado, $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$. Como $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0,9$, $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0,95$, es decir, $z_{\alpha/2} = 1,64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1,64 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{0,02} \right)^2 = 41^2 = 1681$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 1681 universitarios.

- b) Si representamos por \hat{p} la proporción de fumadores de los $n = 2000$ universitarios en la muestra, se tiene que $\hat{p} = 180/2000 = 0,09$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

donde \hat{p} representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de universitarios que fuman, al 90% de confianza es:

$$\left(0,09 - 1,64 \sqrt{\frac{0,09(1-0,09)}{2000}}, 0,09 + 1,64 \sqrt{\frac{0,09(1-0,09)}{2000}} \right) = (0,08, 0,10),$$

puesto que $\hat{p} = 0,09$, $n = 2000$ y ya vimos que al 90% de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1,64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90% de que el verdadero porcentaje de fumadores en la universidad está entre el 8% y el 10%.

4B. En un estudio sobre el gasto diario por turista en una determinada región, se tomó una muestra aleatoria de 3600 turistas, para los que el gasto total en un día, entre todos, había sido de 244800 euros. Suponiendo que el gasto diario sigue una distribución normal con desviación típica 40, se pide:

- a) **[1,5 puntos]** Construir un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse el verdadero gasto medio diario a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 euro y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:

Si denotamos por X la v.a. «gasto diario», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 40$, es decir, $X \rightarrow N(\mu, 40)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 3600$ para la cual se obtiene una media muestral $\bar{x} = \frac{244800}{3600} = 68$.

- a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde \bar{x} representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza es:

$$\left(68 - 1,96 \frac{40}{\sqrt{3600}}, 68 + 1,96 \frac{40}{\sqrt{3600}}\right) = (66,69, 69,31),$$

puesto que $\bar{x} = 68$, $n = 3600$, $\sigma = 40$ y el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0,95$ o lo que es lo mismo, el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0,975$, es decir, $z_{\alpha/2} = 1,96$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 95 % de que el gasto medio diario de los turistas de esa región está entre 66,69 y 69,31 euros.

- b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 1$ y $1 - \alpha = 0,95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1,96$, se tiene que

$$n \geq \left(1,96 \frac{40}{1}\right)^2 = 6146,56,$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 6147 turistas.
