Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2016-2017

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen.
Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.
Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0.50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1.40 euros. Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 2

El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2 - 10t^3, \quad 8 \leq t \leq 13,$$

donde *V(t)* denota el número de visitantes y *t* la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para $t = 11$ horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. **(2 puntos)**

(b) Encontrar el número máximo de visitantes. **(0.5 puntos)**

(c) Determinar si la función $V(t)/(t-10)$ tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determinarla. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3

En la exposición de la Facultad de Ciencias “Original o Réplica" hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

(a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal original? **(1 punto)**

(b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea réplica? **(1 punto)**

(c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil? **(1.5 punto)**

Justificar las respuestas.

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar las matrices inversas de *A* y de *B*. **(1 punto)**

(b) Comprobar que $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$ **(1 punto)**

(c) Hallar la matriz *X* que verifique $A.X=B$ **(1.5 puntos)**

PROBLEMA 2

El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función:

$$N(t)=t^3-21t^2+99t+1000, \quad 1\le t\le 12$$

Siendo *N* el número de empleados y *t* los distintos meses del año.

Se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿En qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados? **(1 punto)**

(b) Halla los valores de dichos máximo y mínimo. **(1 punto)**

(c) Representa de forma aproximada la función *N(t)* en dicho periodo. **(1 punto)**

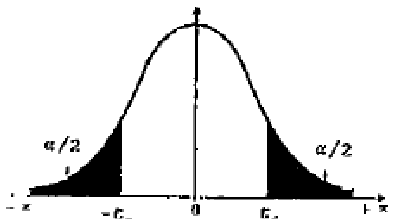
PROBLEMA 3

Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realiza un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas mal gestionadas. **(2.5 puntos)**

(b) Si la empresa, quiere que la longitud del intervalo sea 0.1, ¿cuántas tiendas debería muestrear? **(1 punto)**

Justificar las respuestas.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0.50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1.40 euros. Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

Denominamos x al número de envases pequeños de 100g = 0,1 kg e y al número de envases grandes de 300 g = 0,3 kg.

Las restricciones serían:

"Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar" → $0,1x+0,3y \leq 2400$

"Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos" → $x \leq 15000 \quad x \geq y$

Estas restricciones, junto con la de que deben ser cantidades positivas conforman:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,1x+0,3y \leq 2400 \\ x \leq 15000 \\ x \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+3y \leq 24000 \\ x \leq 15000 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$

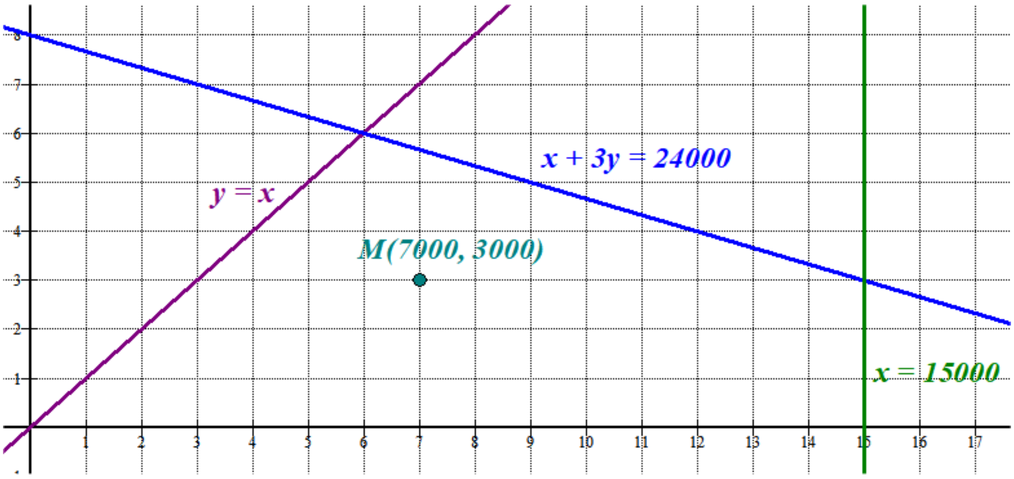
Y deseamos maximizar la función beneficio que es $B(x,y)=0,5x+1,4y$

Dibujamos las rectas asociadas a estas restricciones.

x	$y=\dfrac{24000-x}{3}$
0	8000
6000	6000
24000	0

$x=15000$	y
15000	8000
15000	6000
15000	0

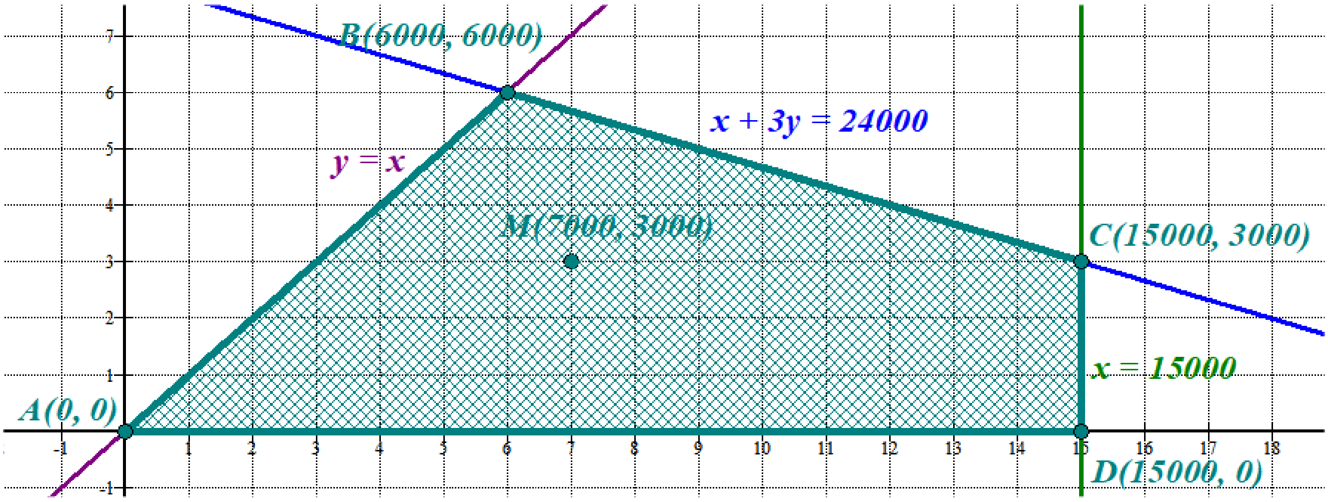
x	$y=x$
6000	6000
15000	15000



Pruebo si el punto M(7000, 3000) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 7000 \geq 0 \\ 3000 \geq 0 \\ 7000+9000 \leq 24000 \\ 7000 \leq 15000 \\ 7000 \geq 3000 \end{array}\right\}$$

Cumple todas las restricciones. La región factible es la región delimitada por las tres rectas dibujadas y el eje OX, que contiene el punto M(7000, 3000). La región factible es la zona rayada del dibujo.



Deseamos maximizar la función beneficio que es $B(x,y)=0,5x+1,4y$. Para ello valoramos esta función en cada uno de los vértices de la región factible y averiguo donde se consigue el valor máximo y cuanto es dicho valor.

A(0,0) → $B(0,0)=0$

B(6000, 6000) → $B(6000,6000)=3000+8400=11400$

C(15000, 3000) → $B(15000,3000)=7500+4200=11700$

D(15000, 0) → $B(15000,0)=7500$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(15000, 3000). El beneficio máximo es de 11700 € y se obtiene con 15000 envases pequeños y 3000 grandes.

PROBLEMA 2

El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2 - 10t^3, \quad 8 \le t \le 13,$$

donde *V(t)* denota el número de visitantes y *t* la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para *t* = 11 horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480.
Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. **(2 puntos)**

(b) Encontrar el número máximo de visitantes. **(0.5 puntos)**

(c) Determinar si la función $V(t)/(t-10)$ tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determinarla. **(0.5 puntos)**

a) A las 11 horas hay un máximo, lo que supone que se anula la derivada.

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2 - 10t^3 \Rightarrow V'(t) = -2310 + 2Bt - 30t^2$$

$$V'(11) = 0 \Rightarrow -2310 + 22B - 30 \cdot 121 = 0$$

$$22B = 5940 \Rightarrow B = \frac{5940}{22} = 270$$

Además la función $V(t) = A - 2310t + 270t^2 - 10t^3$ pasa por el punto $(12, 480)$ por lo que:

$$V(12) = 480 \Rightarrow A - 27720 + 38880 - 17280 = 480$$

$$A = 6600$$

Los valores buscados son A = 6600 y B = 270.

La función es $V(t) = 6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3, \quad 8 \le t \le 13,$

b) El enunciado del problema dice que se alcanza un máximo de visitantes a las 11 horas, luego el número de visitantes en el momento de máxima afluencia es de

$$V(11) = 6600 - 2310 \cdot 11 + 270 \cdot 11^2 - 10 \cdot 11^3 = 550.$$

c) Llamemos $f(t) = \dfrac{V(t)}{t-10} = \dfrac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10}, \quad 8 \le t \le 13,$

Como es una función racional, la asíntota vertical estará en los valores que anulen el denominador, es decir, en *t = 10*. Este valor está en el dominio, *c*omprobemos que es una asíntota.

$$\lim_{x \to 10} f(t) = \lim_{x \to 10} \frac{V(t)}{t-10} = \lim_{x \to 10} \frac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10} = \frac{33600 - 33100}{0} = \frac{500}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal ni oblicua, ya que su dominio es (8, 13) y no se puede calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito.

La función $f(t) = \dfrac{V(t)}{t-10} = \dfrac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10}, \quad 8 \le t \le 13,$ tiene una asíntota vertical en $x = 10$.

PROBLEMA 3

En la exposición de la Facultad de Ciencias "Original o Réplica" hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

(a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal original? **(1 punto)**

(b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea réplica? **(1 punto)**

(c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil? **(1.5 punto)**

Justificar las respuestas.

Hay un total de 106 piezas y 40 son originales.

(a) De las 106 piezas solo hay 20 metales originales, como la elección de cualquiera de las piezas es equiprobable podemos aplicar la regla de Laplace y

$$P(\text{La pieza sea un metal original}) = \boxed{\frac{20}{106} = 0{,}189}$$

(b) De las 106 piezas hay 66 piezas que son réplicas, volvemos a aplicar la regla de Laplace y

$$P(\text{La pieza sea réplica}) = \boxed{\frac{66}{106} = 0{,}623}$$

(c) Si es una réplica, sabemos que solo puede ser una de las 66 que lo son. De ellas solo hay 36 que son réplicas de fósil, aplicando la regla de Laplace, tenemos que

$$P(\text{Sea un fósil / Es una réplica}) = \boxed{\frac{36}{66} = 0{,}545}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$P(\text{Sea un fósil / Es una réplica}) = \frac{P(\text{Sea un fósil y Es una réplica})}{P(\text{Es una réplica})} = \frac{\frac{36}{106}}{\frac{66}{106}} = \boxed{\frac{36}{66} = 0{,}545}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar las matrices inversas de *A* y de *B*. **(1 punto)**

(b) Comprobar que $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$ **(1 punto)**

(c) Hallar la matriz *X* que verifique $A.X=B$ **(1.5 puntos)**

(a) Veo si sus determinantes son no nulos.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0 \quad y \quad |B|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$$

Al ser no nulos existen las matrices inversas tanto de A como de B.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

(b) Calculamos la matriz resultado de cada miembro de la igualdad y compruebo que se obtiene el mismo resultado.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 11 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow |A\cdot B|=-56+55=-1\neq 0$$

$$(A.B)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B\right)^t\right)}{|A\cdot B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}7 & 11\\ -5 & -8\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-8 & 5\\ -11 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 11 & -7\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 11 & -7\end{pmatrix}$$

Queda demostrada la igualdad.

OTRA FORMA DE HACERLO

Para que $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$ debe cumplirse que la matriz $A\cdot B$ al multiplicarla por $B^{-1}.A^{-1}$ nos de la matriz Identidad.

$$(A.B)^{-1}\cdot A.B=Id$$

$$B^{-1}.A^{-1}\cdot A.B=B^{-1}.\mathrm{Id}.B=B^{-1}.B=Id$$

Y también que

$$A.B\cdot(A.B)^{-1} = Id$$

$$A.B \cdot B^{-1}.A^{-1} = A.Id.A^{-1} = A.A^{-1} = Id$$

Queda demostrado que la matriz inversa del producto AB es $B^{-1}.A^{-1}$

(c) Despejando en la ecuación $A.X = B \Rightarrow A^{-1}\cdot A.X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función:

$$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000, \quad 1 \le t \le 12$$

Siendo N el número de empleados y t los distintos meses del año.

Se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿En qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados? **(1 punto)**

(b) Halla los valores de dichos máximo y mínimo. **(1 punto)**

(c) Representa de forma aproximada la función *N(t)* en dicho periodo. **(1 punto)**

(a) Derivamos e igualamos a cero la derivada buscando los máximos y mínimos locales. Luego lo comparamos con los valores en los extremos del intervalo (t = 1, t = 12)

$$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000 \Rightarrow N'(t) = 3t^2 - 42t + 99$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 42t + 99 = 0 \Rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = \begin{cases} = \dfrac{14+8}{2} = 11 \\ = \dfrac{14-8}{2} = 3 \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función se producen en t = 3 y en t = 11. Basta con calcular el número de empleados en estos puntos para obtener el momento donde se produce ese máximo y ese mínimo.

$$N(1) = 1 - 21 + 99 + 1000 = 1079$$

$$N(3) = 27 - 189 + 297 + 1000 = 1135$$

$$N(11) = 11^3 - 21\cdot 11^2 + 99\cdot 11 + 1000 = 879$$

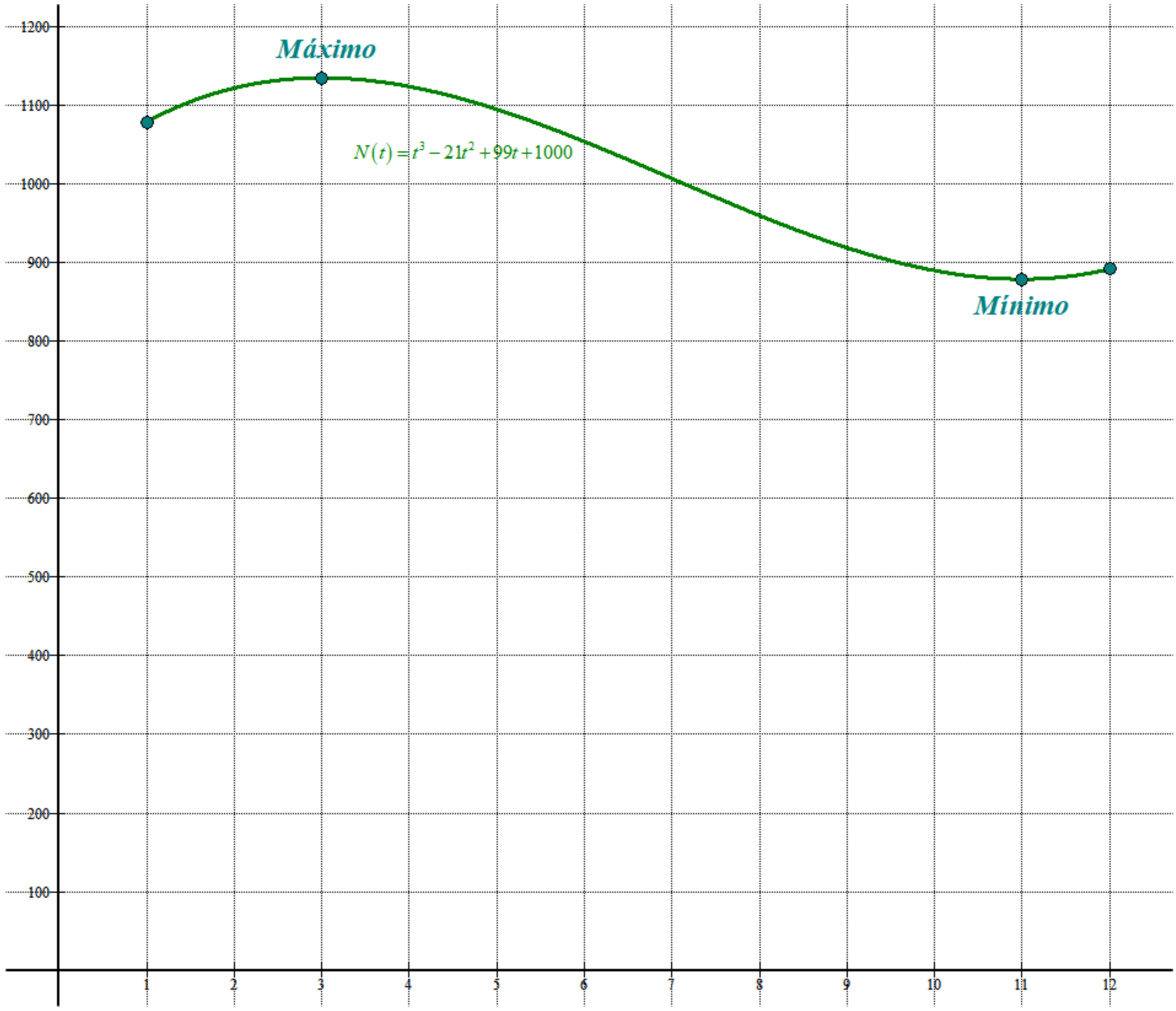
$$N(12) = 12^3 - 21\cdot 12^2 + 99\cdot 12 + 1000 = 892$$

El mínimo de empleados es 879 y se produce en el mes 11. El máximo de empleados es 1135 y se produce en el mes 3.

(b) El máximo es 1135 y el mínimo es 879.

(c) Obtengo una tabla de valores. Además he comprobado que el mínimo relativo se produce en t = 11 y el máximo en t = 3.

t	$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000$
1	1079
3	1135 Máximo
11	879 Mínimo
12	892



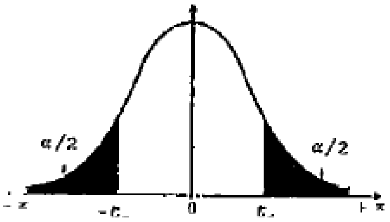
PROBLEMA 3

Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realiza un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas mal gestionadas. **(2.5 puntos)**

(b) Si la empresa, quiere que la longitud del intervalo sea 0.1, ¿cuántas tiendas debería muestrear? **(1 punto)**

Justificar las respuestas.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

(a) Los datos son $p = \dfrac{28}{95} = 0,295; \quad n = 95$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos 1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05→ $z_{\alpha/2} = 1,96$

El error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\dfrac{0,295 \cdot (0,705)}{95}} = 0,0917$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que utilizan el tranvía es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0,295 - 0,0917,\ 0,295 + 0,0917\right) = \left(0.2033, \quad 0.3867\right)$$

El intervalo de confianza al 95% es entre 20% y 39% de tiendas mal gestionadas.

(b) Si la longitud del intervalo es 0.1 entonces el error debe ser la mitad, 0.05. Sustituyendo en la fórmula:

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 0,05 \Rightarrow 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,295 \cdot 0,705}{n}} = 0,05 \Rightarrow \sqrt{\frac{0,295 \cdot 0,705}{n}} = \frac{0,05}{1,96}$$

$$\frac{0,295 \cdot 0,705}{n} = \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 \Rightarrow n\left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 = 0,295 \cdot 0,705 \Rightarrow n = \frac{0,295 \cdot 0,705}{\left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2} = 319,6$$

Debería muestrear 320 tiendas