PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \text{ para } x\neq -1.$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.5 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r\equiv\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1\equiv x=0$ y $\pi_2\equiv y=0$.

a) Halla los puntos de la recta *r* que equidistan de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

b) Determina la posición relativa de la recta *r* y la recta intersección de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^{x}$.

a) Determina *a* sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$. **(1.25 puntos)**

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera la funciones $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ln(x+2)$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de *f*, la gráfica de *g*, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas). **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^{t}A=B^{t}$, donde X^{t}, B^{t} denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo. **(1.25 puntos)**

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice *A*. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

<u>EJERCICIO 1</u> (2.5 puntos)
Considera la función *f* definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \text{ para } x\neq -1.$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.5 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**

a) El dominio de la función $f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}$ para $x\neq -1$ es $\mathbb{R}-\{-1\}$.

- *Asíntota vertical*. $x=a$.
  Como hemos excluido $x=-1$ del dominio, comprobamos el comportamiento de la función en su entorno.
  $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{2}{0}=\infty$. La **asíntota vertical** es $\boxed{x=-1}$

- *Asíntota horizontal*. $y=b$
  $$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$
  No tiene **asíntotas horizontales**.

- *Asíntota oblicua*. $y=mx+n$
  $$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$
  $$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2(x+1)}-\frac{x}{2}\right)=$$
  $$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4-x(x+1)}{2(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+3x+4-\cancel{x^2}-x}{2(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}=\boxed{1}$$
  La **asíntota oblicua** es $\boxed{y=\frac{1}{2}x+1}$

b) Utilizamos la derivada para establecer el comportamiento de la función.

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+2)-\left(x^2+3x+4\right)2}{(2x+2)^2}=\frac{4x^2+4x+6x+6-\left(2x^2+6x+8\right)}{(2x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}$$

Igualamos a cero la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=0\Rightarrow 2x^2+4x-2=0\Rightarrow x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=-1+\sqrt{2}=0,41=x\\[2ex]\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}=-2,41=x\end{cases}$$

Con estos 2 valores la recta real se divide en 3 zonas, si incluimos el valor excluido del dominio tenemos 5 zonas, las marco en la recta real.

- En $(-\infty,-2.41)$ probamos con $x=-3$ y la derivada vale

  $f\,'(-3)=\dfrac{2(-3)^2+4(-3)-2}{(2(-3)+2)^2}=\dfrac{4}{16}>0$. Es positiva y la función crece en $(-\infty,-2.41)$

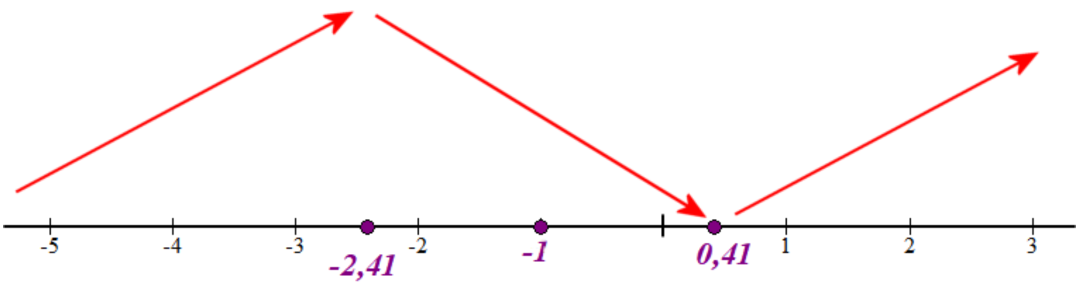
  .
- En $(-2.41,-1)$ probamos con $x=-2$ y la derivada vale

  $f\,'(-2)=\dfrac{2(-2)^2+4(-2)-2}{(2(-2)+2)^2}=\dfrac{-2}{4}<0$. Es negativa y la función decrece en $(-2.41,-1)$.
- En $(-1,0.41)$ probamos con $x=0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{2\cdot 0^2+0-2}{(0+2)^2}=\dfrac{-2}{4}<0$.

  Es negativa y la función decrece en $(-1,0.41)$.
- En $(0.41,+\infty)$ probamos con $x=2$ y la derivada vale

  $f\,'(2)=\dfrac{2(2)^2+4(2)-2}{(2(2)+2)^2}=\dfrac{14}{64}>0$. Es positiva y la función crece en $(0.41,+\infty)$.

  El esquema es



$$\boxed{\text{La función crece en } (-\infty,-2.41)\cup(0.41,+\infty) \text{ y decrece en } (-2.41,-1)\cup(-1,0.41)}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función definida por $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

$$\int f(x)dx=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx=\left\{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable}\\ t=e^x\\ dt=e^xdx\to dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}\end{array}\right\}=\int\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}=\int\frac{1+t}{(1-t)t}dt=\ldots$$

Descomponemos la fracción $\frac{1+t}{(1-t)t}$ en fracciones simples

$$\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{t}\Rightarrow\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{At+B(1-t)}{(1-t)t}\Rightarrow 1+t=At+B(1-t)$$

$$Si\ t=0\to 1+0=A\cdot 0+B(1-0)\to 1=B$$

$$Si\ t=1\to 1+1=A+B(1-1)\to 2=A$$

Por lo que la descomposición obtenida es $\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{2}{1-t}+\frac{1}{t}$

Lo aplicamos a nuestro integrando

$$\ldots=\int\frac{2}{1-t}+\frac{1}{t}dt=\int\frac{2}{1-t}dt+\int\frac{1}{t}dt=-2\int\frac{-1}{1-t}dt+\int\frac{1}{t}dt=-2\ln|1-t|+\ln t=\ln t-\ln(1-t)^2$$

Deshacemos el cambio de variable $t=e^x$.

$$F(x)=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx=\ln e^x-\ln\left(1-e^x\right)^2=\boxed{x-\ln\left(1-e^x\right)^2+K}$$

Como además debe pasar por el punto $(1,1)$ se cumple que

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=x-\ln\left(1-e^x\right)^2+K\\ F(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow F(1)=1-\ln\left(1-e^1\right)^2+K=1\Rightarrow K=\ln(1-e)^2$$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x)=x-\ln\left(1-e^x\right)^2+\ln(1-e)^2}$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Si el determinante de A es 1 implica que $|X|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc=1$

En la ecuación matricial $AX=XA$ reemplazo las matrices por su expresión.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = d \\ b = -c \end{array}\right\}$$

Si le quitamos las ecuaciones repetidas y le añadimos la condición $a+d=1$ y la del valor del determinante de A nos queda el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ad-bc=1 \\ a=d \\ b=-c \\ a+d=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} aa-(-c)c=1 \\ a+a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+c^2=1 \\ 2a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+c^2=1 \\ \boxed{a=\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}+c^2=1 \Rightarrow c^2 = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \boxed{b=-c=-\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

Los valores son $a=\frac{1}{2}$, $b=-\sqrt{\frac{3}{4}}$, $c=\sqrt{\frac{3}{4}}$ y $d=\frac{1}{2}$

Si ponemos estos valores en la matriz X tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Existe otra solución que consiste en tomar el valor de c el negativo de la raíz, entonces valdría $\boxed{c=-\sqrt{\frac{3}{4}}} \Rightarrow b=-c=\sqrt{\frac{3}{4}}$. El valor de a y d serían los mismos.

Si ponemos estos valores en la matriz X tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) Halla los puntos de la recta *r* que equidistan de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

b) Determina la posición relativa de la recta *r* y la recta intersección de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

a) Pasamos la ecuación de la recta *r* a paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(2,2,1) \\ \vec{v_r} = (-1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right\}$$

Un punto P cualquiera de la recta tendrá coordenadas $P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$.

Si equidista de los planos debe cumplir $d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda) \\ \pi_1 \equiv x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_1) = \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{1+0+0}} = |2-\lambda|$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda) \\ \pi_2 \equiv y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_2) = \frac{|2+3\lambda|}{\sqrt{0+1+0}} = |2+3\lambda|$$

Por lo que $d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \rightarrow |2+3\lambda| = |2-\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 2+3\lambda = 2-\lambda \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ o \\ 2+3\lambda = -2+\lambda \Rightarrow 2\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$

Los dos puntos de la recta r que equidistan de los planos son:

$$\left.\begin{array}{l} P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda) \\ \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(2,2,1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda) \\ \lambda = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P'(4,-4,-1)}$$

b)

Hallemos la ecuación de la recta r´ que definen los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

$$r' \equiv \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r' \equiv \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$ Ecuaciones parámetricas de la recta r´ .

Si no veis claras estas ecuaciones paramétricas hacerlo de forma mecánica considerando un punto de la recta $P_{r'}(0,0,0)$ y como vector director el que surge de multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos.

$$\vec{v_{r'}} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k = (0,0,1)$$

La ecuación en paramétricas de la recta sería:

$$\left.\begin{array}{l} P_{r'}(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_{r'}}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r' \equiv \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

Primera forma de resolverlo (con sistemas de ecuaciones)

Planteemos el sistema formado por las rectas r y r´.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \left.\begin{array}{r} x=2-\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\} \\ r' \equiv \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z=\beta \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0=2-\lambda \\ 0=2+3\lambda \\ \beta=1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda=2 \\ -3\lambda=2 \\ \beta=1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=2 \\ \lambda=\dfrac{-3}{2} \\ \beta=1+\lambda \end{array}\right\}$$

λ no puede tomar dos valores distintos y el sistema no tiene solución, lo que significa que las rectas no tienen ningún punto en común. La recta r y la recta r´ definida por los planos o se cruzan o son paralelas.

Comparemos sus vectores directores y veamos si son proporcionales y por tanto paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{r'}}=(0,0,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(-1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{0}{-1}=\frac{0}{3}=\frac{1}{1}? \text{ No es cierto, pues se cumple } \frac{0}{-1}=\frac{0}{3}\neq\frac{1}{1}$$

Por lo que las rectas no son paralelas y por lo tanto $\boxed{\textbf{se cruzan}}$.

Segunda forma de resolverlo (con teoría de vectores, rectas y planos)

Tenemos las ecuaciones de ambas rectas, así como sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(2,2,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(-1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{r} x=2-\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{r'}(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_{r'}}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r' \equiv \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

¿Son paralelas o coincidentes las rectas? Para ello los vectores directores deben ser proporcionales y no lo son, pues $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{r'}}=(0,0,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(-1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0}{-1}=\frac{0}{3}\neq\frac{1}{1}$.

Luego las rectas se cortan o se cruzan. Para establecer en que situación de estas dos estamos tomamos los vectores directores de las rectas y el vector que une un punto de r con un punto de r´, por ejemplo $\overrightarrow{P_{r'}P_r}=(2,2,1)-(0,0,0)=(2,2,1)$, calculemos su producto mixto.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_{r'}P_r}=(2,2,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(-1,3,1) \\ \overrightarrow{v_{r'}}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6+0+0-0+2+0=8\neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo $\boxed{\textbf{las rectas se cruzan}}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.
a) Determina *a* sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

a) Si la función tiene un punto crítico en x = 0 significa que la derivada de la función se anula en dicho valor.

$$f(x)=(x-a)e^x \Rightarrow f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(1+x-a)e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=(1+x-a)e^x \\ x=0 \text{ punto crítico} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)=(1+0-a)e^0=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

b) Para $a=1$ la función es $f(x)=(x-1)e^x$. Calculamos su derivada segunda y la igualamos a cero.

$$f(x)=(x-1)e^x \Rightarrow f'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$$

$$f''(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$$

Igualamos a cero la derivada segunda.

$$f''(x)=0 \Rightarrow (1+x)e^x=0 \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

Comprobemos que la derivada tercera es no nula.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=e^x+xe^x \Rightarrow f'''(x)=e^x+e^x+xe^x \\ x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'''(-1)=e^{-1}+e^{-1}-e^{-1}=e^{-1}\neq 0$$

$\boxed{\text{En } x=-1 \text{ hay un punto de inflexión}}$.

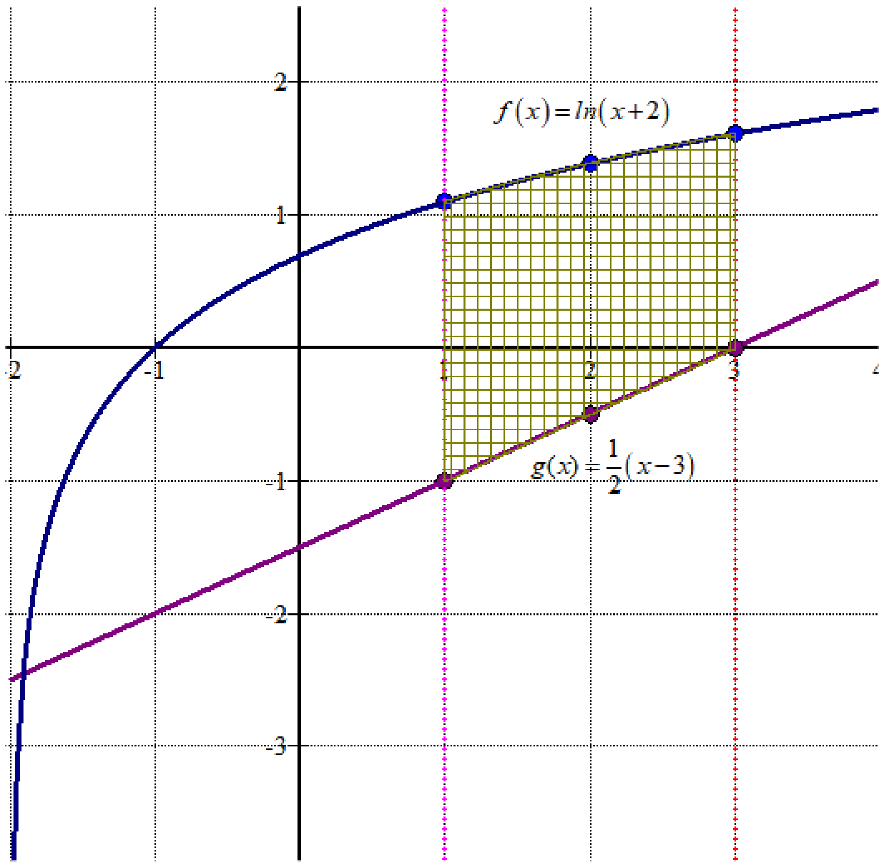
EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
Considera la funciones $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ln(x+2)$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.
a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de *f*, la gráfica de *g*, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas). **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

a) Dibujemos las gráficas entre $x=1$ y $x=3$. Hacemos una tabla de valores para 1, 2 y 3.

x	$f(x)=\ln(x+2)$
1	$\ln 3=1{,}1$
2	$\ln 4=1{,}39$
3	$\ln 5=1{,}61$

x	$g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$
1	$\frac{1}{2}(1-3)=-1$
2	$\frac{1}{2}(2-3)=-0{,}5$
3	$\frac{1}{2}(3-3)=0$

La región es



b) Contando los cuadraditos que abarca la región rayada, aproximadamente son entre 3 y 4 unidades cuadradas.
Calculemos su valor exacto usando integrales definidas.
El área de la región es la integral definida de la función mayor menos la función menor entre 1 y 3.

$$\acute{A}rea = \int_1^3 \ln(x+2) - 0,5(x-3)dx$$

Calculamos la integral indefinida y luego la definida.

$$\int \ln(x+2) - 0,5(x-3)dx = \int \ln(x+2)dx + \int -0,5x + 1,5dx =$$

$$1^{\text{a}} \text{ integral} \rightarrow \int \ln(x+2)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integrar por partes} \\ u = \ln(x+2) \rightarrow du = \dfrac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\ln(x+2) - \int x\frac{1}{x+2}dx =$$

$$= x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx = x\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = x\ln(x+2) - \left(\int \frac{x+2}{x+2}dx + \int \frac{-2}{x+2}dx \right) =$$

$$= x\ln(x+2) - \left(\int dx - 2\int \frac{1}{x+2}dx \right) = x\ln(x+2) - (x - 2\ln(x+2)) = \underline{x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)}$$

2ª integral $\rightarrow \int -0,5x+1,5dx = -0,5\frac{x^2}{2}+1,5x = \boxed{-0,25x^2+1,5x}$

Juntamos las integrales 1ª y 2ª

$$\int \ln(x+2)-0,5(x-3)dx = x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)-0,25x^2+1,5x =$$
$$= x\ln(x+2)+2\ln(x+2)-0,25x^2+0,5x$$

Pasamos al cálculo del área

$$\boxed{\acute{A}rea =}\int_1^3 \ln(x+2)-0,5(x-3)dx = \left[x\ln(x+2)+2\ln(x+2)-0,25x^2+0,5x\right]_1^3 =$$
$$=\left(3\ln(3+2)+2\ln(3+2)-0,25\cdot 3^2+0,5\cdot 3\right)-\left(1\cdot\ln(1+2)+2\ln(1+2)-0,25\cdot 1^2+0,5\cdot 1\right)=$$
$$=5\ln 5-2,25+1,5-3\ln 3+0,25-0,5=\boxed{3,75\,u^2}$$

<u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2m^2-1\\ m\\ 1\end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA=B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

El sistema que se plantea es:

$$X^tA=B^t \Rightarrow \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m^2-1 & m & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}(2-m)x+\quad y+mz=2m^2-1\\ x+my+\ z=m\\ (2m-1)x+y+\quad z=1\end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como matriz de coeficientes la matriz A y la matriz ampliada es A/B.
Veamos cuando se anula el determinante de A

$$|A|=\begin{vmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{vmatrix}=m(2-m)+m+2m-1-\left(m^2(2m-1)+1+2-m\right)$$

$$|A|=2m-\cancel{m^2}+m+2m-1-2m^3+\cancel{m^2}-1-2+m=-2m^3+6m-4$$

Igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow -2m^3+6m-4=0$$

Utilizamos Ruffini

	−2	0	6	−4
1		−2	−2	4
	−2	−2	4	0

$\rightarrow \boxed{m=1}$

Resuelvo la ecuación de segundo grado que queda $-2m^2-2m+4=0$

$$m=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-2)\cdot 4}}{-4}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{-4}=\begin{cases}\frac{2+6}{-4}=\boxed{-2=m}\\ \frac{2-6}{-4}=1=m\end{cases}$$

El determinante de A se anula para $m=1$ y $m=-2$.

CASO 1. $m\neq 1$ y $m\neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A y A/B es 3, al igual que el número de incógnitas. El **sistema es Compatible Determinado** (solución única)

CASO 2. $m=1$.

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{r}(2-1)x+y+z=2-1\\ x+y+\ z=1\\ (2-1)x+y+\ z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+\ z=1\end{array}\right\}\Rightarrow x+y+z=1$$

Como son las 3 ecuaciones iguales el sistema se reduce a una ecuación con 3 incógnitas. El **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=-2$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{r}(2-(-2))x+\ y+(-2)z=2(-2)^2-1\\ x+(-2)y+\ z=(-2)\\ (2(-2)-1)x+y+\ z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+y-2z=7\\ x-2y+z=-2\\ -5x+y+z=1\end{array}\right\}$$

En este sistema el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&-2&1\\-5&1&1\end{pmatrix}$ es 2. Sabemos que no es 3 pues su determinante es nulo y el menor que resulta de quitar fila 1ª y columna 1ª tiene determinante no nulo.

$\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$. Rango de A es 2.

Para determinar el rango de la matriz ampliada $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&-2&7\\1&-2&1&-2\\-5&1&1&1\end{array}\right)$ calculamos el determinante del menor de orden 3 que resulta de quitarle la columna 1ª.

$\begin{vmatrix}1&-2&7\\-2&1&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=1+4-14-7-4+2=-21\neq 0$. Rango de A/B es 3.

Como los rangos de matriz de coeficientes A y matriz ampliada A/B son distintos **el sistema es incompatible** (no tiene solución).

También se puede discutir este CASO 3 utilizando Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y-2z=7 \\ x-2y+z=-2 \\ -5x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª + Ecuación 3ª} \\ \begin{array}{cccc} 4x & y & -2z & 7 \\ x & -2y & z & -2 \\ -5x & y & z & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & =4 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+y-2z=7 \\ x-2y+z=-2 \\ 0=4 \end{array}\right\}$$

La tercera ecuación es imposible y por tanto es un **sistema incompatible**.

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo. **(1.25 puntos)**

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice *A*. **(1.25 puntos)**

a) Utilicemos la fórmula del área de un triángulo como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores de dos de sus lados.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1,0) \\ B(1,0,2) \\ C(0,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,0,2)-(1,1,0)=(0,-1,2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,2,1)-(1,1,0)=(-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-i-2j-k-2i=-3i-2j-k=(-3,-2,-1)$$

$$\boxed{\acute{A}rea(tri\acute{a}ngulo\ ABC)}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{9+4+1}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}u^2}$$

b) Utilizamos en este caso el producto escalar de los vectores del apartado anterior que tienen origen en el vértice A.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,-1,2) \\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,-1,2)\cdot(-1,1,1)=0-1+2=1$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A \Rightarrow 1=\sqrt{0+1+4}\cdot\sqrt{1+1+1}\cdot\cos A \Rightarrow 1=\sqrt{15}\cdot\cos A$$

$$\boxed{\cos A=\frac{1}{\sqrt{15}}}$$