MATEMÁTICAS II

Modelo de examen, basado en la nueva estructura

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualquiera de ellas.

Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones están indicadas.

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz **X** que resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$A\mathbf{X} - \mathbf{X} = B$$

2. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (0,75 *puntos)* Estudie si existe la matriz inversa de *B*.

b) (1,25 *puntos)* Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea *k* un parámetro real y considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y - z = 1$$
$$2x + 3y + kz = 3$$
$$x + ky + 3z = 2$$

Determine los valores del parámetro real *k*, para lo que ese sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

4. *a*) (1,25 *puntos)* Determine el valor de la constante real *m* para que los cuatro puntos siguientes:

$$A: (1, 1, 0)\,,\ B: (1, 3, 1)\,,\ C: (2, 1, -1)\,,\ D: (1, m, m)$$

sean coplanarios, es decir, estén en un mismo plano.

b) (0,75 *puntos)* Determine el área del triángulo que definen los puntos *A* , *B* y *C*

5. Determine la ecuación del plano *π* que contiene a las dos rectas *r* y *s* siguientes:

$$r: \begin{cases} x - 2y & = -4 \\ 3x + 2z & = +4 \end{cases} \qquad s: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

6. Determine la integral:

$$\int \frac{2-e^x}{e^{2x}-1}dx$$

usando el cambio de variable $t = e^x$

7. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+e^x)}$$

8. Considere la función: $f(x) = \ln(1+x^2)$

a) (1 *punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$, si existen.

b) (1 *punto)* Determine los puntos de inflexión de la función $f(x)$, si existen.

9. Se desea construir un contenedor con la forma habitual de una caja (tipo caja de zapatos cerrada) cuya capacidad sea de 35 m^3. Dado que el único material empleado para su construcción es bastante costoso, se desea que la cantidad total de material empleado sea mínima.

Además, el contenedor debe ser cerrado, es decir hay que construir sus seis caras.

Sabiendo la base es un rectángulo cuyo lado largo es el doble que el corto, determine las dimensiones del mismo para que el coste del material empleado para su fabricación sea mínimo.

10. Una máquina automática que rellena botellas de un refresco está presuntamente regulada para que rellene cada botella con 250 ml. Sin embargo, se sabe que la cantidad real de líquido que hay en cada botella se representa por una variable aleatoria Normal de media 250 ml y varianza 400.

a) *(*1,25 *puntos)* Se considera que una botella está correctamente rellenada si contiene entre 240 y 260 ml. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella esté correctamente rellenada?

b) *(*0,75 *puntos)* Por otra parte, las botellas con un contenido inferior a 210 ml deben ser desechadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se deseche una botella?