UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a **cuatro** ejercicios entre los propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

1. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R

$$\left.\begin{array}{l} ax+2y = a^2 \\ -x+y+z=5 \\ x-ay-z=-(4+a) \end{array}\right\} ;\ (1{,}5\ \text{puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor a = 1. (1 punto)

2. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. (1,5 puntos)

3. a) Determina el valor de *a* y de *b* para que la siguiente función *f(x)* sea derivable en todo R

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases} \qquad (1{,}5\ \text{puntos})$$

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–3; 3]. (1 punto)

4. Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} \qquad \text{b) } \lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3} \qquad (1{,}25\ \text{puntos por límite})$$

5. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta x = –2 y el eje de abscisas. (1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función g(x) en el punto de abscisa x = 4. (1 punto)

6. Sean la recta $r\equiv \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto P(3, 1, –1) y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P.
(1,25 puntos)

7. Dados los puntos A(1, 2, 0), B(0, –1, 2), C(2. –1, 3) y D(1, 0, 1) :
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)

8. a) Una fábrica A produce el 30% de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20% y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4% de los tractores fabricados por A, el 10% de los fabricados por B y el 2% de los fabricados por C.

Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. (0,75 puntos)

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. (0,5 puntos)

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. (0,75 puntos)

b2) Al menos tres chicos. (0,5 puntos)

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

SOLUCIONES

1. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R

$$\left.\begin{array}{l} ax+2y \quad = a^2 \\ -x+\ y+z=5 \\ x-ay-z=-(4+a) \end{array}\right\}$$; (1,5 puntos)

b) Resuélvelo razonadamente para el valor a = 1. (1 punto)

a) La matriz asociada al sistema es

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix}=-a+2-2+a^2=a^2-a$$

Si igualamos a cero

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq 0 \ y \ a \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a=0$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2y \quad =0 \\ -x+\ y+z=5 \\ x \quad -z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x+\ y+z=5 \\ x \quad -z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+z=5 \\ x-z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+z=5 \\ x=z-4 \end{array}\right\} \Rightarrow -z+4+z=5 \Rightarrow 4=5$$

Esta igualdad es imposible y el sistema es INCOMPATIBLE. Sin solución

CASO 3. $a=1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x+2y \quad =1 \\ -x+y+z=5 \\ x-y-z=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}}+\text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} -x & +y & +z & =5 \\ x & +2y & & =1 \\ \hline & 3y & +z & =6 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \text{ - Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} x & -y & -z & =-5 \\ -x & -2y & & =-1 \\ \hline & -3y & -z & =-6 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y \quad =1 \\ 3y+z=6 \\ -3y-z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{Puedo eliminar la } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y \quad =1 \\ 3y+z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=1-2y \\ z=6-3y \end{array}\right\}}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Es COMPATIBLE INDETERMINADO.

b) Para el valor a = 1 está resuelto en el apartado anterior y la solución es:
$x = 1 - 2t,\ y = t,\ z = 6 - 3t$

2. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. (1,5 puntos)

a) Comprobamos si tiene inversa viendo si el determinante de A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Calculamos la inversa con la fórmula $A^{-1} = \dfrac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t\right)}{1} = Adj\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Si $A \cdot X - 2B = C \Rightarrow A \cdot X = 2B + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\left(2B + C\right) \Rightarrow X = A^{-1}\left(2B + C\right)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-1 & 2+6 \\ 2+2 & 6-1 & 4+6 \\ -2-3-4 & -5-9+2 & -5-6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$$

3. a) Determina el valor de *a* y de *b* para que la siguiente función *f(x)* sea derivable en todo R

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$ (1,5 puntos)

b) Comprueba si la función $f\left(x\right)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–3; 3]. (1 punto)

a) Para que sea derivable debe ser continua. El único problema radica en x = 1 ya que ambas funciones son continuas y derivables en su ámbito de definición.
Para ser continua en x = 1 debe cumplirse $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)= f(1)$. Comprobémoslo

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2}=a-b \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax^2+bx+2=a+b+2 \\ f(1)=\mathrm{a}+\mathrm{b}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=a+b+2 \Rightarrow -2b=2 \Rightarrow b=-1$$

La derivada de la función es:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} 2ax+b & si \quad x<1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2b}{x^3} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para ser derivable en x = 1 deben ser iguales las derivadas laterales.

Derivada por la izquierda de 1 vale $f\,'(1^-)=2a+b$

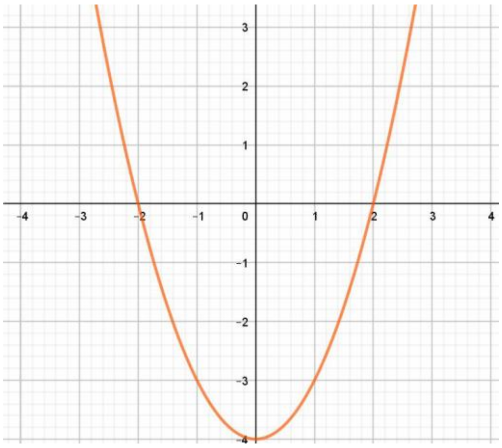
Derivada por la derecha de 1 vale $f\,'(1^+)=\dfrac{a}{2}+2b$

$$f\,'(1^+)=f\,'(1^-) \Rightarrow 2a+b=\frac{a}{2}+2b \Rightarrow 4a+2b=a+4b \Rightarrow 3a=2b$$

Como $b=-1 \Rightarrow 3a=-2 \Rightarrow a=\dfrac{-2}{3}$

La función es derivable cuando $b=-1 \; y \; a=\dfrac{-2}{3}$

b) Debemos probar que es derivable en (-3,3), continua en [–3,3] y que *f(–3)=f(3).*
Es derivable y continua en todo R porque se trata de un polinomio.
Es fácil ver que *f(–3) = f(3) = 5*
Luego hay al menos un punto del intervalo en el que la derivada se anula. En este caso es x = 0 pues *f ’(x)=2x*.



4. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ (1,25 puntos por límite)

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\left(\frac{2e^{0}}{2}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}=\{\text{Indeterminación del tipo nº e}\}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\frac{x}{x-1}}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}\right)\frac{x}{x-1}}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{2xe^{x-1}-x^2-x}{x^2-1}\right)}=e^{\frac{0}{0}}=\{\text{Indeterminación de L´Hôpital}\}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}+2xe^{x-1}-2x-1}{2x}\right)}=e^{\frac{2+2-2-1}{2}}=\boxed{e^{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}=\frac{0}{0}=\{\text{Aplicamos regla de L´Hôpital}\}=\lim_{x\to -1}\frac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4}=\frac{2-1}{-2+4}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

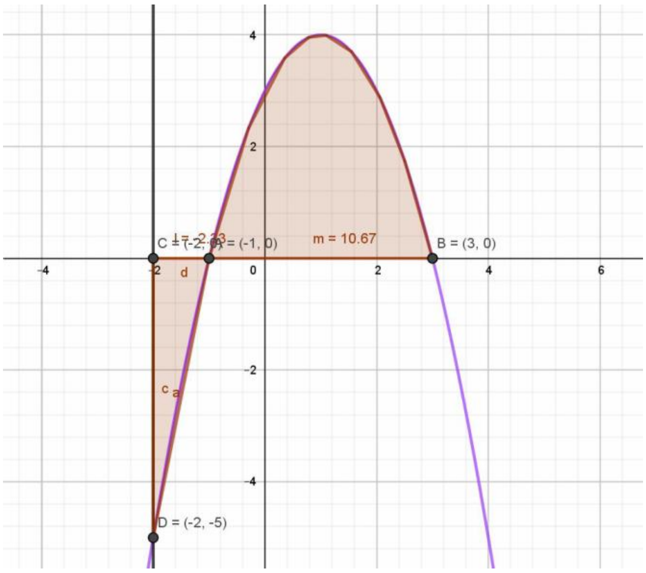
5. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta x = –2 y el eje de abscisas. (1,5 puntos)

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función g(x) en el punto de abscisa x = 4. (1 punto)

a) Comprobemos si se cortan la función y el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2x+3 \\ \text{Eje OX} \to y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases} x=\dfrac{-2+4}{-2}=-1 \\ x=\dfrac{-2-4}{-2}=3 \end{cases}$$

El recinto empieza en x = –2 y luego al cortar en x = –1 y x = 3, tendremos 2 trozos de recinto cuya área la calculamos con integrales definidas.



$$\acute{A}rea = \left|\int_{-2}^{-1} -x^2+2x+3dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} -x^2+2x+3dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3(-1)\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+3(-2)\right]\right| + \left|\left[-\frac{3^3}{3}+3^2+3\cdot 3\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3(-1)\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{3}+1-3-\frac{8}{3}-4+6\right| + \left|-9+9+9-\frac{1}{3}-1+3\right| =$$

$$= \frac{7}{3}+11-\frac{1}{3} = \boxed{13\,u^2}$$

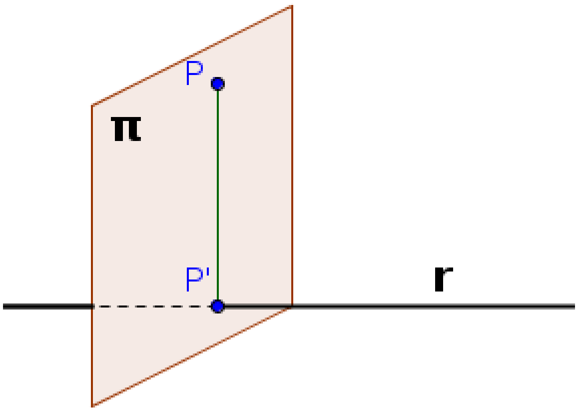
b) La función $g(x) = -x^2+2x+3$ tiene derivada $g'(x) = -2x+2$ que toma en x = 4 el valor $g'(4) = -8+2 = -6$ y la recta normal deberá tener pendiente $m = \frac{-1}{g'(4)} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$.

Como debe pasar por el punto $(4, g(4)) = (4,-5)$ la ecuación de la recta es:

$$y+5 = \frac{1}{6}(x-4) \Rightarrow 6y+30 = x-4 \Rightarrow \boxed{x-6y-34=0}$$

6. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto P(3, 1, –1) y el plano $\pi \equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P.
(1,25 puntos)

a) UNA FORMA DE HACERLO
Para hallar la distancia de un punto P a una recta *r* necesito hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto y luego determinar el punto de corte de recta y plano P´. La distancia de punto a recta será la distancia entre los dos puntos.



Hallemos el plano π. Tenemos su vector normal que es el director de la recta r $\vec{n} = \vec{v_r} = (3,1,2)$ y el punto P(3,1,–1). Su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (3,1,2) \\ \text{Pasa por } P(3,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x + y + 2z + D = 0 \\ \text{Pasa por } P(3,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 9 + 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv 3x + y + 2z - 8 = 0$

Hallemos el punto P´ de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x + y + 2z - 8 = 0 \\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1+3t) + t + 2(-1+2t) - 8 = 0$$

$$3 + 9t + t - 2 + 4t - 8 = 0$$

$$14t - 7 = 0$$

$$t = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

El punto tiene coordenadas

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 + 2\frac{1}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P'\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

El vector $\overrightarrow{PP'} = P' - P = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - (3,1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\text{Distancia}(P, \text{r}) = \text{Distancia}(P, P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\, u}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Con fórmula

Necesito un vector director de la recta $\vec{v_r} = (3,1,2)$ y un punto de la recta Q(1,0,–1).

$$\overrightarrow{PQ}=(1,0,-1)-(3,1,-1)=(-2,-1,0)$$

$$\text{Distancia}(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\text{módulo del vector}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{\text{módulo del vector }-2i+4j+k}{\sqrt{14}}$$

$$\text{Distancia}(P,\ r)=\frac{\left|(-2,4,1)\right|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{4+16+1}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{21}{14}}=\boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\ u}$$

b) El plano π' paralelo a $\pi\equiv 2x+y-z=0$ que contiene a P(3,1,–1) tiene ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv 2x+y-z+D=0\\ \text{Contiene a P}(3,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow 6+1+1+D=0\Rightarrow D=-8\Rightarrow \pi'\equiv 2x+y-z-8=0$$

El punto de corte de la recta r y el plano π' se obtiene resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv 2x+y-z-8=0\\ r\equiv\begin{cases}x=1+3t\\ y=t\\ z=-1+2t\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2+6t+t+1-2t-8=0\Rightarrow 5t-5=0\Rightarrow t=1$$

$$\text{El punto } Q \text{ tiene coordenadas }\begin{cases}x=1+3=4\\ y=1\\ z=-1+2=1\end{cases}\Rightarrow Q(4,1,1)$$

La recta que pasa por P(3,1,–1) y Q(4,1,1) tiene vector director $\overrightarrow{PQ}=(4,1,1)-(3,1,-1)=(1,0,2)$ y su ecuación es:

$$\begin{cases}x=3+t\\ y=1\\ z=-1+2t\end{cases}$$

7. Dados los puntos A(1, 2, 0), B(0, –1, 2), C(2. –1, 3) y D(1, 0, 1) :
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)

a) Necesito dos vectores directores y un punto que pertenezca al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-1,2)-(1,2,0)=(-1,-3,2)\\ v=CD=D-C=(1,0,1)-(2,-1,3)=(-1,1,-2)\\ \text{Contiene al punto A}(1,2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\ -1 & -3 & 2\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-6-2y+4-z-3z-2y+4-2x+2=0$$

$$\Rightarrow 4x-4y-4z-4=0\Rightarrow \text{La ecuación del plano es }\boxed{x-y-z-1=0}$$

b) Utilizamos la fórmula, para lo cual necesito las coordenadas de los vectores que parten de A hasta B, C y D.

$$\left.\begin{array}{l} AB = B - A = (0,-1,2)-(1,2,0) = (-1,-3,2) \\ AC = C - A = (2,-1,3)-(1,2,0) = (1,-3,3) \\ AD = D - A = (1,0,1)-(1,2,0) = (0,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Volumen del tetraedro ABCD} = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$\text{Volumen del tetraedro ABCD} = \left| \frac{1}{6}(3-4+3-6) \right| = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} u^3}$$

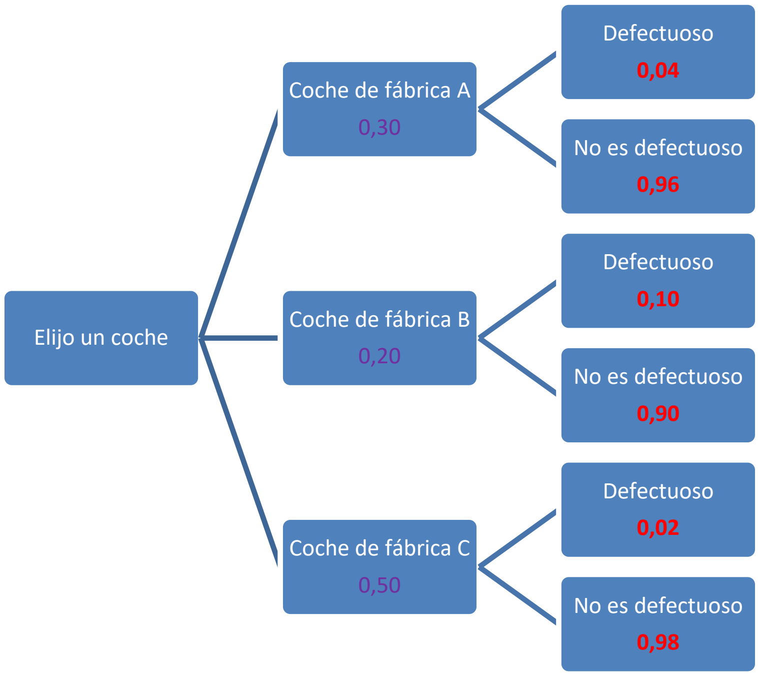
8. a) Una fábrica A produce el 30% de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20% y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4% de los tractores fabricados por A, el 10% de los fabricados por B y el 2% de los fabricados por C.
Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. (0,75 puntos)
a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. (0,5 puntos)

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. (0,75 puntos)
b2) Al menos tres chicos. (0,5 puntos)

a) Construyamos un diagrama de árbol, para establecer las distintas posibilidades.



a1)
P(No es defectuoso) =
=P(es de la fábrica A y no sale defectuoso) + P(es de la fábrica B y no sale defectuoso) +
+ P(es de la fábrica C y no sale defectuoso) =
= 0,3 · 0,96 + 0,2 · 0,9 + 0,5 · 0,98 = 0,958 = $\boxed{95,8\ \%}$

a2)

$$P(\text{Si resultó defectuoso, que no sea de C}) =$$

$$= P(\text{No sea de C / Es defectuoso}) = \frac{P(\text{No sea de C y sea defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = \frac{0,012 + 0,02}{0,042} = 0,7619 = \boxed{76,19\%}$$

b) Si llamamos X = Número de chicos que salen a la pizarra al cabo de la semana, se trata de una distribución binomial B(n, p) con n = 5 y p = 4/20 = 1/5 = 0,2.

La probabilidad pedida se calcula siguiendo las fórmulas de la distribución binomial.

b1)

$$P(Salgan\ 3\ chicas) = P(Salgan\ 2\ chicos) = P(X = 2) = \binom{5}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^3 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0,04 \cdot 0,512 = \boxed{0,2048}$$

b2)

Si calculamos la probabilidad de que salgan 3, la probabilidad de que salgan 4 y la de que salgan 5 y las sumamos obtendremos la probabilidad pedida.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^2 + \binom{5}{4} 0,2^4 \cdot 0,8^1 + \binom{5}{5} 0,2^5 \cdot 0,8^0 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} 0,2^3 \cdot 0,8^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0,2^4 \cdot 0,8 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} 0,2^5 =$$

$$= 10 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 + 5 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + 0,2^5 = \boxed{0,0579}$$