	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2019-2020** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.

a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta.

Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y=f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim_{x\to 2/3}\frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $x=0$, $y=1$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x=z-1\\ y=2-3z\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}x=4+5z\\ y=4z-3\end{cases}$; se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)=0,55$,

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,90$ y $P(B/A)=0,25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/\overline{A})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 3t+3\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro *t*.
b) (1.5 puntos) Resolver el sistema $AX=B$, para los valores de *t* que lo hagan compatible y determinado.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y=f\left(x\right)$ en $x=2$.

b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y=f\left(x\right)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 xf\left(x\right)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A\left(1,1,-2\right)$, $B\left(3,-1,4\right)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=-2+5\lambda\\ z=3\end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O\left(0,0,0\right)$, *P* el punto medio del segmento *AB* y *Q* la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi\equiv z=7$.
b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.
c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.
b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36ºC.
c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.
a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.
b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta.
Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

a) Se necesita 2000 · 0,78 = 1560 litros de nitrógeno, 2000 · 0,21 = 420 litros de oxígeno y 2000 · 0,01 = 20 litros de argón.

b) Llamemos “x” los litros de A, “y” a los litros de B y “z” a los litros de C.
Tendríamos un sistema con 3 ecuaciones, una para cada componente.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A→x	0,8x	0,20x	0
B→y	0,7y	0,2y	0,1y
C→z	0,6z	0,4z	0

$$\left.\begin{array}{r} 1560 = 0,8x + 0,7y + 0,6z \\ 420 = 0,2x + 0,2y + 0,4z \\ 20 = 0,1y \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos despejando “y” en la ecuación 3ª y sustituyendo en las otras ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 1560 = 0,8x + 0,7y + 0,6z \\ 420 = 0,2x + 0,2y + 0,4z \\ \boxed{y = \dfrac{20}{0,1} = 200} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1560 = 0,8x + 0,7\cdot 200 + 0,6z \\ 420 = 0,2x + 0,2\cdot 200 + 0,4z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1560 - 140 = 0,8x + 0,6z \\ 420 - 40 = 0,2x + 0,4z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1420 = 0,8x + 0,6z \\ 380 = 0,2x + 0,4z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 710 = 0,4x + 0,3z \\ 190 = 0,1x + 0,2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7100 = 4x + 3z \\ 1900 = x + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7100 = 4x + 3z \\ -7600 = -4x - 8z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Sumando las ecuaciones}\} \Rightarrow -500 = -5z \Rightarrow \boxed{z = 100}$$

Sustituyendo en la ecuación $1900 = x + 2z$ nos queda $1900 = x + 200 \Rightarrow \boxed{x = 1700}$

Son necesarios **1700 litros de A, 200 litros de B y 100 de C**.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y=f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim_{x\to 2/3}\frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $x=0$, $y=1$.

a) La pendiente de la tangente es el valor de la derivada. Calculemos la derivada de $f(x)=e^{3x-2}$

$f(x)=e^{3x-2} \Rightarrow f'(x)=3e^{3x-2}$ y lo igualamos a $\frac{3}{e}$ →

$$f'(x)=3e^{3x-2}=\frac{3}{e}\Rightarrow 3e^{3x-2}\cdot \mathrm{e}=3\Rightarrow e^{3x-2+1}=1\Rightarrow e^{3x-1}=e^{0}\Rightarrow 3x-1=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

En $x=\frac{1}{3}$ la función vale $f\left(\frac{1}{3}\right)=e^{3\frac{1}{3}-2}=e^{1-2}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

El punto de tangencia tiene coordenadas $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{e}\right)$

La ecuación de la recta tangente en $x=a$ es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Como $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{e}$ y $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{e}$

La recta tangente queda $y-\frac{1}{e}=\frac{3}{e}\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y-\frac{1}{e}=\frac{3x}{e}-\frac{3}{3e}\Rightarrow y-\frac{1}{e}=\frac{3x}{e}-\frac{1}{e}\Rightarrow \boxed{y=\frac{3x}{e}}$

b)

$$\lim_{x\to 2/3}\frac{1-f(x)}{6x-4}=\lim_{x\to 2/3}\frac{1-e^{3x-2}}{6x-4}=\frac{1-e^{3\frac{2}{3}-2}}{6\frac{2}{3}-4}=\frac{1-1}{4-4}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}\left\{\textit{Aplico L´Hôpital}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 2/3}\frac{0-3e^{3x-2}}{6}=\frac{-3e^{3\frac{2}{3}-2}}{6}=\frac{-3}{6}=\boxed{-0,5}$$

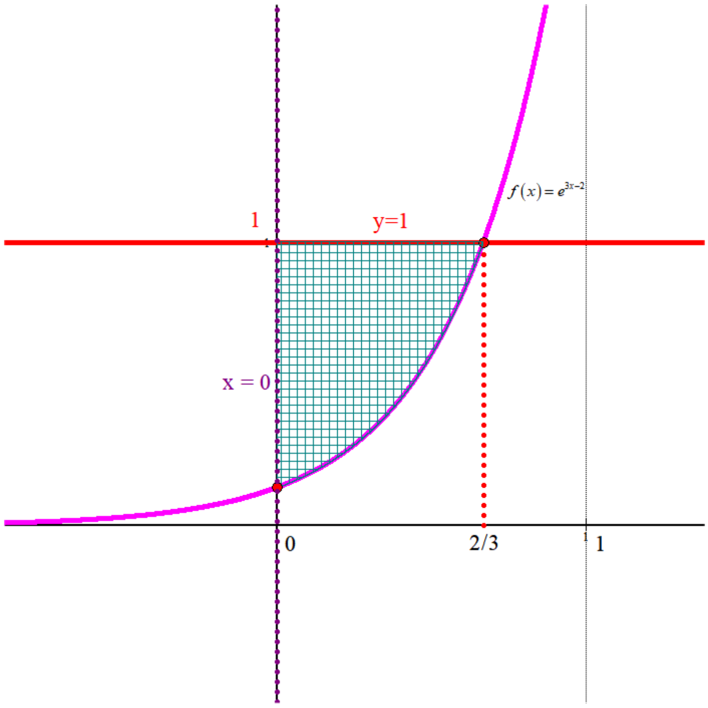
c) Buscamos los puntos de corte de $f(x)=e^{3x-2}$ y la recta $y=1$.

$1=e^{3x-2}\Rightarrow 3x-2=0\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

El área pedida es la integral definida de $f(x)=e^{3x-2}$ menos $y=1$ entre 0 y $\frac{2}{3}$.

$$\text{Área}=\left|\int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2}-1dx\right|=\left|\left[\frac{e^{3x-2}}{3}-x\right]_0^{\frac{2}{3}}\right|=\left|\left[\frac{e^{3\frac{2}{3}-2}}{3}-\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{e^{0-2}}{3}-0\right]\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{e^{-2}}{3}\right|=\left|-\frac{1}{3}-\frac{e^{-2}}{3}\right|=\boxed{\frac{1}{3}+\frac{e^{-2}}{3}=0,378\,u^{2}}$$



Como se puede comprobar el área es menos de medio cuadradito, como hemos obtenido con el cálculo integral.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4+5z \\ y = 4z-3 \end{cases}$; se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

a) Extraemos de las rectas su vector director y un punto, también sus ecuaciones paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+z \\ y = 2-3z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(-1,2,0) \\ \vec{v_1} = (1,-3,1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 4+5z \\ y = 4z-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4+5z \\ y = -3+4z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2(4,-3,0) \\ \vec{v_2} = (5,4,1) \end{cases}$$

¿Son paralelas o coincidentes? Para ello los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_1} = (1,-3,1) \\ \vec{v_2} = (5,4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{1}{5} = \frac{-3}{4} = \frac{1}{1}?$$ No es cierto, pues todas las fracciones son distintas.

Las rectas ni son paralelas ni coincidentes. Por lo que se cruzan o cortan.

Para saber cuál de estas dos situaciones se cumple, haremos el producto mixto de los vectores directores y del vector que va de un punto de r_1 a un punto de r_2.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (4,-3,0)-(-1,2,0) = (5,-5,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1}=(1,-3,1)\\ \overrightarrow{v_2}=(5,4,1)\\ \overrightarrow{P_1P_2}=(5,-5,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1P_2}\right]=\begin{vmatrix}1&-3&1\\5&4&1\\5&-5&0\end{vmatrix}=0-15-25-20+0+5=-55\neq0$$

Como el producto mixto es no nulo **las rectas se cruzan**.

La distancia entre dos rectas que se cruzan es el cociente entre el producto mixto hallado antes y el modulo del producto vectorial de los vectores directores. Dicho de otra forma, es el volumen del paralelepípedo entre el área de la base t nos da la altura (distancia entre ambas rectas).

Nos falta hallar el producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1}=(1,-3,1)\\ \overrightarrow{v_2}=(5,4,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-3&1\\5&4&1\end{vmatrix}=-3i+5j+4k+15k-j-4i=-7i+4j+19k=(-7,4,19)$$

Módulo del producto vectorial $=\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|=\sqrt{(-7)^2+4^2+19^2}=\sqrt{426}=20,64$

$$\boxed{d(r_1,r_2)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{55}{\sqrt{426}}\boxed{=2,66}$$

b) El plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_1}=(1,-3,1)$ y el vector $\overrightarrow{OP_1}$.

$$\left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\in plano\\ \overrightarrow{v_1}=(1,-3,1)\\ \overrightarrow{OP_1}=(-1,2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow plano\equiv\begin{vmatrix}x-0&y-0&z-0\\1&-3&1\\-1&2&0\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-3&1\\-1&2&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow-y+2z-3z-2x=0\Rightarrow-2x-y-z=0\Rightarrow plano\equiv2x+y+z=0$$

El punto de corte lo obtenemos resolviendo el sistema formado por la ecuación de la recta r_2 y plano.

$$\left.\begin{array}{l}plano\equiv2x+y+z=0\\ r_2\equiv\begin{cases}x=4+5z\\y=4z-3\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow2(4+5z)+(4z-3)+z=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow8+10z+4z-3+z=0\Rightarrow15z=-5$$

$$\boxed{z=\frac{-5}{15}=-\frac{1}{3}}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=}4+4z=4-\dfrac{5}{3}\boxed{=\dfrac{7}{3}}\\ \boxed{y=}4z-3=-\dfrac{4}{3}-3=\boxed{-\dfrac{13}{3}}\end{cases}$$

El punto de corte es $P\left(\frac{7}{3},-\frac{13}{3},-\frac{1}{3}\right)$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)=0,55$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,90$ y $P(B/\text{A})=0,25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/\overline{\text{A}})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

a) Como

$$\left.\begin{array}{l} P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,90 \\ \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}\end{array}\right\} \Rightarrow P(\overline{A\cap B})=0,90 \Rightarrow 1-P(A\cap B)=0,9 \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=1-0,9=0,1}$$

También tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} P(B/\text{A})=0,25 \Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=0,25 \\ P(A\cap B)=0,1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0,1}{P(A)}=0,25 \Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{0,1}{0,25}=0,4}$$

Además

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0,55 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\} \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,55 \\ P(A\cap B)=0,1 \\ P(A)=0,4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,4+P(B)-0,1=0,55 \Rightarrow \boxed{P(B)=0,25}$$

Por último

$$\boxed{P(B/\overline{\text{A}})=}\frac{P(B\cap\overline{\text{A}})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0,25-0,1}{1-0,4}=\boxed{0,25}$$

b) Los sucesos A y B son independientes cuando $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{r} P(A\cap B)=0,1 \\ P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,25=0,1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son iguales y por tanto son independientes.}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 3t+3\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro *t*.

b) (1.5 puntos) Resolver el sistema $AX=B$, para los valores de *t* que lo hagan compatible y determinado.

a) <u>UNA FORMA DE HACERLO (Gauss)</u>

A La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ es de orden 2x3, su rango es 2 o 1.

$$\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\text{Fila 3ª + Fila 1ª} & \\ 1 \quad 2+t & \\ -1 \quad -2 & \\ \hline 0 \quad t & \to \text{Nueva fila 3ª}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ll}\text{Fila 2ª - 5 · Fila 1ª} & \\ 5 \quad 10+3t & \\ -5 \quad -10-5t & \\ \hline 0 \quad -2t & \to \text{Nueva fila 2ª}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 0 & -2t\\ 0 & t\end{pmatrix}$$

El rango de A es el mismo que el rango de la matriz que hemos obtenido con las transformaciones. Hay 2 casos distintos.

CASO 1. Si $t=0$.

La matriz transformada de A queda $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y tiene rango 1. **Rango de A es 1** si $t=0$.

CASO 2. Si $t\neq 0$.

La matriz transformada de A tiene el menor que resulta de quitarle la fila 3ª con determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix}1 & 2+t\\ 0 & -2t\end{vmatrix}=-2t\neq 0$$

El rango de A es 2 si $t\neq 0$.

OTRA FORMA DE HACERLO

La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ es 2x3, su rango es 2 o 1.

¿El rango de A es 2?

El menor que resulta de quitarle la primera fila tiene determinante

$$\begin{vmatrix}5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-10+10+3t=+3t=0\Rightarrow t=0$$

El menor que resulta de quitarle la 2ª fila tiene determinante

$$\begin{vmatrix}1 & 2+t\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-2+2+t=t=0\Rightarrow t=0$$

Conclusión: El rango de A es 2 si t es distinto de 0.

Si $t = 0$ el rango es 1, pues los menores de orden 2 tienen determinante nulo y hay un menor de orden 1 con determinante no nulo.

b) $AX = B$ se convierte en el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+(2+t)y \\ 5x+(10+3t)y \\ -x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+(2+t)y=3 \\ 5x+(10+3t)y=9 \\ -x-2y=3t+3 \end{matrix}\right\}$$

Para que sea compatible determinado el rango de A debe ser 2, al igual que el rango de A/B. Para que el rango de A sea 2 debe ser $t \neq 0$. Visto en el apartado anterior.

Dada la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{pmatrix}$ para que el rango de A/B sea 2 debe ser su determinante 0.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{vmatrix} =$$

$$= (10+3t)(3t+3) - 9(2+t) - 30 + 3(10+3t) - 5(2+t)(3t+3) + 18 =$$

$$= \cancel{30t} + \cancel{30} + 9t^2 + \cancel{9t} - \cancel{18} - \cancel{9t} - \cancel{30} + \cancel{30} + 9t - \cancel{30t} - \cancel{30} - 15t^2 - 15t + \cancel{18} =$$

$$= -6t^2 - 6t$$

$$|A/B| = 0 \Rightarrow -6t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 6t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t+1 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

Como $t \neq 0$, entonces es $t = -1$.

Para $t = -1$ el sistema es compatible determinado. Resolvámoslo.

$$\left.\begin{matrix} x+(2-1)y=3 \\ 5x+(10-3)y=9 \\ -x-2y=-3+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=3 \\ 5x+7y=9 \\ -x-2y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Al ser compatible determinado} \\ \text{nos quedamos con la ecuación 1ª y 3ª} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=3 \\ -x-2y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ -x \quad -2y = 0 \\ \underline{\;x \qquad y = 3\;} \\ \qquad -y = 3 \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=3 \\ -y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=3 \\ \boxed{y=-3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-3=3 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

El sistema es compatible determinado para $t=-1$ y tiene la solución $x=6$, $y=-3$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=2$.

b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y=f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 xf(x)\,dx$.

a) La derivada de $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ es $f'(x)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}$

La recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ en $x=2$ tiene la ecuación:

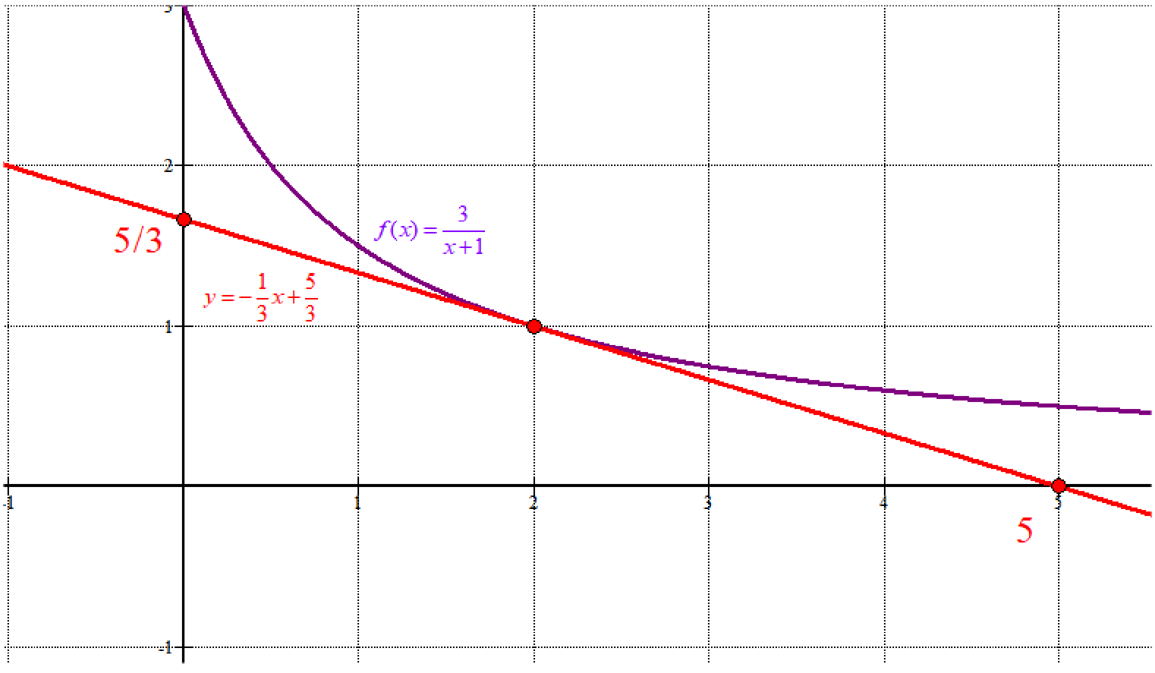
$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{3}{2+1}=1 \\ f'(2)=\dfrac{-3}{(2+1)^2}=\dfrac{-3}{9}=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y-1=-\frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-1=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

Dibujemos la función y la recta tangente para tener más claro cómo resolver el problema.

x	$y=\dfrac{3}{x+1}$
0	3
1	1,5
2	1
3	0,75

x	$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$
0	$\dfrac{5}{3}$
3	$\dfrac{2}{3}$
5	0



Averiguamos los puntos de corte con los ejes de la tangente, aunque aparecen en la tabla de la recta tangente y son $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ y $(5,0)$. Si observamos la figura la base del triángulo es 5 y la altura es 5/3, por lo que el área del triángulo es $\boxed{\text{Área}=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{5\cdot\frac{5}{3}}{2}=\frac{25}{6}=4{,}16\,u^2}$

b) Las asíntotas de $f(x)=\frac{3}{x+1}$ son:

- Asíntota vertical. $x=-1$

  $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{0}=\infty$

- Asíntota horizontal. $y=b$.

  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{\infty}=0$

  La asíntota horizontal es $y=0$

- Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No tiene asíntota oblicua por tener horizontal.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.
La igualamos a cero.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-3}{(x+1)^2}=0\Rightarrow -3=0$$

No tiene solución. Por lo que no tiene puntos críticos.

Como tiene el punto de discontinuidad en $x=-1$ estudiamos si crece o decrece antes y después de este valor.

En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-3}{(-2+1)^2}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.

En $(-1,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{-3}{(0+1)^2}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.

Conclusión: La función decrece en todo su dominio.

c)

$$\int_0^2 x\frac{3}{x+1}dx=3\int_0^2\frac{x}{x+1}dx=3\int_0^2\frac{x+1-1}{x+1}dx=3\left(\int_0^2\frac{x+1}{x+1}dx+\int_0^2\frac{-1}{x+1}dx\right)=3\left(\int_0^2 dx-\int_0^2\frac{1}{x+1}dx\right)=$$

$$=3\left[x-\ln(x+1)\right]_0^2=3\left(\left[2-\ln(2+1)\right]-\left[0-\ln(0+1)\right]\right)=\boxed{6-3\ln 3}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi \equiv z = 7$.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

a) Averiguamos las coordenadas de los puntos P y Q.

$$P = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,1,-2)+(3,-1,4)}{2} = (2,0,1)$$

La recta s que pasa por A y B tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1,-2) \in s \\ \overrightarrow{AB} = (3,-1,4)-(1,1,-2) = (2,-2,6) \\ \vec{v} = (1,-1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -2+3\lambda \end{array}\right\}$$

Q es la intersección de esta recta y el plano $\pi \equiv z = 7$. Hallamos Q resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -2+3\lambda \end{array}\right\} \\ \pi \equiv z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ 7 = -2+3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ 9 = +3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ \lambda = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1+3 = 4 \\ y = 1-3 = -2 \end{array}\right\}$$

El punto Q tiene coordenadas $Q(4,-2,7)$.

Pasamos a calcular el área del triángulo OPQ que se calcula como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores de dos de sus lados.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (2,0,1)-(0,0,0) = (2,0,1) \\ \overrightarrow{OQ} = (4,-2,7)-(0,0,0) = (4,-2,7) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = 4j - 4k - 14j + 2i = 2i - 10j - 4k = (2,-10,-4)$$

$$\boxed{\text{Área } OPQ = \frac{\left|\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP}\right|}{2} = \frac{\sqrt{4+100+16}}{2} = \frac{\sqrt{120}}{2} = \sqrt{30} = 5,47\ u^2}$$

b) Si el plano π´ es perpendicular a la recta debe tener como vector normal el director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(1,-2,3) \\ \vec{v_r} = (3,5,0) \end{array}\right\}$$

El plano pedido tendrá la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1,-2) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{v_r} = (3,5,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(1,1,-2) \in \pi \\ \pi' \equiv 3x+5y+D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+5+D = 0 \Rightarrow D = -8$$

$$\boxed{\pi' \equiv 3x+5y-8 = 0}$$

c) El coseno del ángulo entre las rectas es el ángulo entre sus respectivos vectores directores.

Obtenemos los vectores directores a partir de sus ecuaciones:

$$s \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -2+3\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1,-1,3)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+5\lambda \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (3,5,0) \\ z = 3 \end{cases}$$

Con el producto escalar obtenemos:

$$\cos(r,s) = \cos(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(3,5,0)(1,-1,3)}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{1+1+9}} = \frac{|3-5|}{\sqrt{374}} = \frac{2}{\sqrt{374}}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.
b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36ºC.
c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

X = Temperatura máxima de un día de junio.

Como la varianza es 25 entonces la desviación típica es $\sigma = \sqrt{25} = 5$. X = N(30, 5)

a)

$$P(28 \le X \le 32) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{28-30}{5} \le Z \le \frac{32-30}{5}\right) = P(-0,4 \le Z \le 0,4) =$$
$$= P(Z \le 0,4) - P(Z \le -0,4) = P(Z \le 0,4) - P(Z \ge 0,4) =$$
$$= P(Z \le 0,4) - (1 - P(Z \le 0,4)) =$$
$$= P(Z \le 0,4) - 1 + P(Z \le 0,4) = 0,6554 + 0,6554 - 1 = \boxed{0,3108}$$

b) Calculamos la probabilidad de que ocurra un día y luego la multiplicamos por el número de días de junio (30).

$$P(X > 36) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{36-30}{5}\right) = P(Z > 1,2) =$$
$$= 1 - P(Z < 1,2) = \{\text{Buscamos en la tabla}\} = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

Multiplicamos esta probabilidad por 30 y obtenemos 0,1151 · 30 = 3.453.

Entre 3 y 4 días de junio tendrán una máxima superior a 36ºC.

c) $P(X > a) = 0,5$ esto es lo que ocurre con la media de una distribución normal, por lo que la temperatura máxima del 10 de junio es la media que vale 30ºC.

Si lo hacemos de forma mecánica tenemos que

$$P(X > a) = 0,5 \Rightarrow 1 - P(X < a) = 0,5 \Rightarrow P(X < a) = 0,5 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow \boxed{a = 30^{\circ} C}$$