UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II.

EJEMPLO DE MODELO DE EXAMEN, REALIZADO A PARTIR DE ENUNCIADOS DE 2019 Y ADAPTADO A LA EXCEPCIONALIDAD DE EBAU2020

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

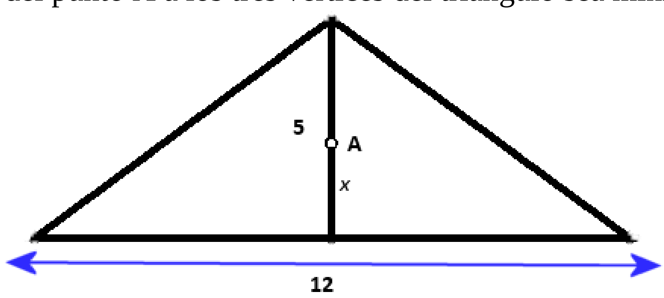
2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

3: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

4: a) **[1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.

b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

5: Los puntos $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ y $C = (0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice *D* está contenido en la recta ***r*** que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *D* sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

6: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

7: El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

8: La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) **[1 p.]** Sin saber donde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) **[1,5 p.]** Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=1 \\ x+ay+\ \ z=a \\ ax+\ \ y+\ \ z=a+3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

a)

Discutamos el sistema $\begin{cases} x+\ \ y+az=1 \\ x+ay+\ \ z=a \\ ax+\ \ y+\ \ z=a+3 \end{cases}$

Para ello consideremos su matriz de los coeficientes:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-\left(a^3+1+1\right)=-a^3+3a-2$

Si igualamos a cero:

$|A|=0 \Rightarrow -a^3+3a-2=0$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow a=1 \text{ es raiz}$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado restante:

$$-a^2-a+2=0 \Rightarrow a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-1)\cdot 2}}{-2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}$$

$$a=\begin{cases} \frac{1+3}{-2}=-2 \\ \frac{1-3}{-2}=1 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores especiales para el parámetro ***a***. Hay tres casos diferentes:

CASO 1. $a\neq 1;\ a\neq -2$

En este caso el determinante es no nulo y el sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a=1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+ \ \ y+z=1 \\ x+y+ \ \ z=1 \\ x+ \ \ \ y+ \ \ z=4 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, pues la ecuación 1ª y la ecuación 3ª no pueden cumplirse al mismo tiempo.

CASO 3. $a=-2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+ \ \ y-2z=1 \\ x-2y+ \ \ z=-2 \\ -2x+ \ \ \ y+ \ \ z=1 \end{cases}$$

Aplicando Gauss y sumando a la ecuación 2ª la 1ª multiplicada por –1. Y a la 3ª le sumamos la 1ª multiplicada por 2:

$$\begin{array}{cccccc} x & -2y & +z & = & -2 \\ -x & -y & +2z & = & -1 \\ \hline & -3y & 3z & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} -2x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & 2y & -4z & = & 2 \\ \hline & 3y & -3z & = & 3 \end{array}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+ \ \ y-2z=1 \\ \ \ -3y+3z=-3 \\ \ \ \ \ 3y-3z=3 \end{cases}$$

La 2ª y 3ª ecuación son iguales. Este sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

En particular, para a = 0 el sistema es SCD y queda

$$\begin{cases} x+ \ \ y \ \ =1 \\ x+ \ \ z=0 \\ y+ \ \ z=3 \end{cases}$$

Que resolviéndolo sale:

$$\begin{cases} x+ \ \ y \ \ =1 \\ x+ \ \ z=0 \\ y+ \ \ z=3 \end{cases} \Rightarrow x=-z \Rightarrow \begin{cases} -z+y=1 \\ y+ \ \ z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y=1+z \Rightarrow 1+z+z=3 \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow z=1$$

$$y=1+1=2 \Rightarrow x=-1$$

$\boxed{\text{El sistema tiene solución única para } a \neq 1;\ a \neq -2 .}$

Para a = 0 el sistema tiene la solución: $\boxed{\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}}$

b) Como hemos visto ocurre para a = –2 y el sistema es:

$$\begin{cases} x+\ \ y-2z=1 \\ x-2y+\ \ z=-2 \\ -2x+\ \ y+\ \ z=1 \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} x+\ \ y-2z=1 \\ 3y-3z=3 \end{cases}$$

$$\text{Simplificando y despejando} \Rightarrow \begin{cases} x+\ \ y-2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1+z \Rightarrow$$

$$x+1+z-2z=1 \Rightarrow x-z=0 \Rightarrow x=z$$

$$\text{La solución es } \boxed{\begin{cases} x=z \\ y=1+z \\ z=z \end{cases}}$$

c) El sistema no tiene solución para a = 1, como se ha visto en el estudio del sistema

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas $A^2, A^3\ y\ A^4$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

a) $$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

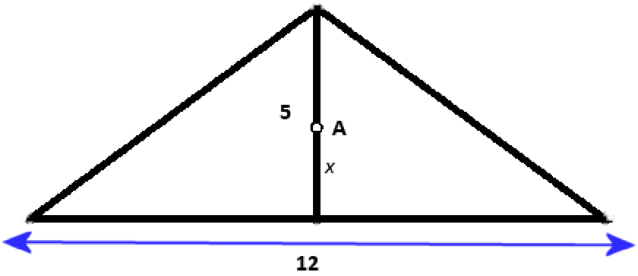
b) $$A^n=\begin{pmatrix}1&n&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Para que exista la inversa debe cumplirse que su determinante no sea nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$ Entonces existe la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:

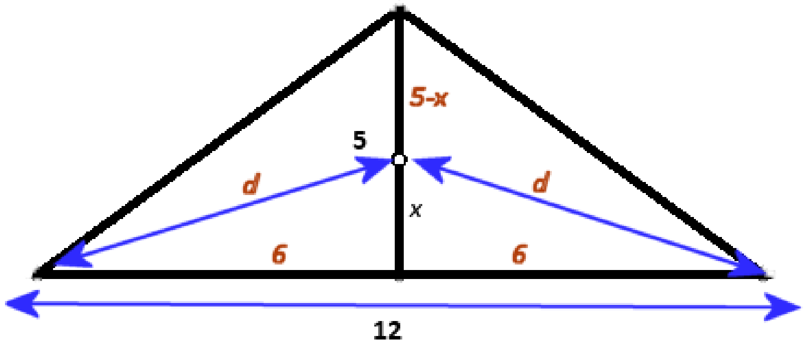


a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}$

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

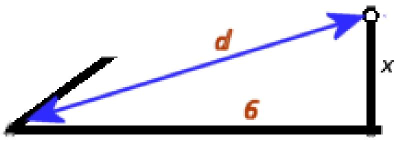
a) Observando el dibujo del enunciado y añadiendo datos al dibujo:



La suma de distancias del punto A a cada vértice es:

$$f(x)=5-x+d+d=5-x+2d$$

Resolviendo el triángulo rectángulo:



aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d=\sqrt{x^2+6^2}=\sqrt{x^2+36}$$

La suma de distancias queda:

$$\boxed{f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}}$$

b) Buscamos los mínimos de la función $f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}$.

Calculamos su derivada e igualamos a cero:

$$f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36} \Rightarrow f'(x)=-1+\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+36}}\cdot(2x)=-1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}=0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}=1 \Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+36}$$

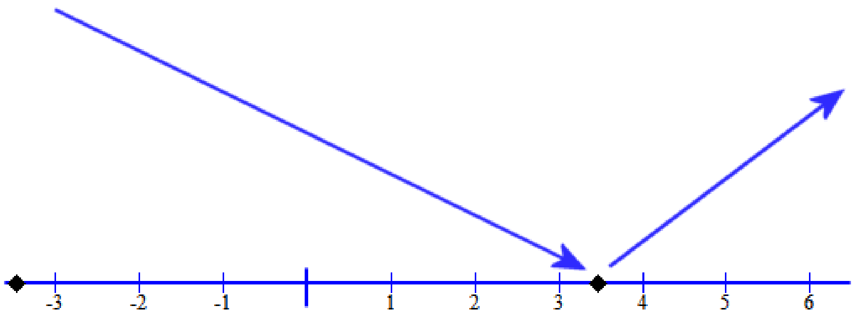
Elevando al cuadrado:

$$(2x)^2=\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2 \Rightarrow 4x^2=x^2+36 \Rightarrow 3x^2=36 \Rightarrow x^2=12 \Rightarrow x=\sqrt{12}=3,46$$

Comprobamos si es un mínimo estudiando el comportamiento de la derivada de la función en todo su dominio:

En el intervalo $(-3,46,\ 3,46)$ tomo el punto $x=0 \Rightarrow f'(0)=-1+\frac{2\cdot 0}{\sqrt{0^2+36}}=-1<0$ la función decrece.

En el intervalo $(3,46,+\infty)$ tomo el punto $x=5 \Rightarrow f'(5)=-1+\frac{2\cdot 5}{\sqrt{5^2+36}}=-1+\frac{10}{\sqrt{61}}>0$ la función crece.



La función presenta un ***mínimo*** en $\boxed{x=\sqrt{12}=3,46}$

O bien se comprueba que es mínimo con la segunda derivada

$$f'(x)=-1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} \Rightarrow f''(x)=0+\frac{2\cdot\sqrt{x^2+36}-2x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+36}}}{\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2+36}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+36}}}{x^2+36}$$

$$x=\sqrt{12} \Rightarrow f''(\sqrt{12})=\frac{2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}-\frac{2\left(\sqrt{12}\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}}}{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}=\frac{2\sqrt{48}-\frac{24}{\sqrt{48}}}{48}>0$$

Luego en $x=\sqrt{12}$ hay un mínimo

c) Para el valor $x=\sqrt{12}=3,46$ la suma de distancias es

$$f(x)=5-\sqrt{12}+2\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}=5-\sqrt{12}+2\sqrt{48}=5-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}=\boxed{5+6\sqrt{3}}$$

4:

a) **[1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.

b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

a)

$$\int x^2 \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow v = \int \cos xdx = senx \end{array} \right\} = x^2 \cdot senx - \int senx \cdot 2xdx =$$

$$= x^2 \cdot senx - 2\int x \cdot senxdx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = senxdx \Rightarrow v = \int \text{sen}\, xdx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= x^2 \cdot senx - 2\left(x \cdot (-\cos x) - \int -\cos xdx \right) = x^2 \cdot senx + 2x \cdot \cos x - 2\int \cos xdx =$$

$$= \boxed{x^2 \cdot senx + 2x \cdot \cos x - 2senx + K}$$

b)

Antes de calcular el área usando la integral definida entre 0 y π, comprobemos donde corta la función el eje OX, por si estos posibles puntos de corte estuvieran entre 0 y π:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cos x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; ... \end{array} \right.$$

$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$, por lo que el área debemos dividirla en dos integrales definidas, una de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y otra de $\frac{\pi}{2}$ a π

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos xdx = \left[x^2 \cdot senx + 2x \cos x - 2senx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot sen\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2sen\frac{\pi}{2} \right) - \left(0^2 \cdot sen0 + 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 - 2sen0 \right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 > 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \cdot sen x + 2x \cos x - 2 sen x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left(\pi^2 \cdot sen \pi + 2 \cdot \pi \cdot \cos \pi - 2 sen \pi \right) - \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot sen \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2 sen \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= -2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2 < 0$$

$$\acute{A}rea = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx \right| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \left| -2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2 \right| =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 + 2\pi + \frac{\pi^2}{4} - 2 = \boxed{\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4 \, u^2}$$

5: Los puntos $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ y $C = (0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice *D* está contenido en la recta ***r*** que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *D* sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

a) Determinemos los vectores directores del plano $\overrightarrow{AB} = (0,3,0) - (3,0,0) = (-3,3,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,0,3) - (3,0,0) = (-3,0,3)$ y elegimos el punto A(3,0,0)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x - 27 - (-9z - 9y) = 0 \Rightarrow 9x - 27 + 9z + 9y = 0$$

Simplificando la ecuación del plano es $\boxed{\pi : x + y + z - 3 = 0}$

b) Si la recta es perpendicular al plano su vector director es el normal al plano π

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1,1,1) \\ P(1,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right\}$$

c) D pertenece a la recta, luego sus coordenadas son $D(1+t, 1+t, 1+t)$

Para aplicar la fórmula del volumen del tetraedro nos falta el vector $\overrightarrow{AD} = (1+t, 1+t, 1+t) - (3,0,0) = (t-2, t+1, t+1)$

$$\text{Volumen del tetraedro de vértices } A,\ B,\ C \text{ y } D = \frac{\left|Det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{6} =$$

$$= \left|\frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ t-2 & t+1 & t+1 \end{vmatrix}}{6}\right| = \left|\frac{9t-18-\left(-9t-9-9t-9\right)}{6}\right| = \left|\frac{27t}{6}\right|$$

Como dicho volumen debe ser 18 lo igualamos y resolvemos la ecuación para determinar ***t*** y por tanto las coordenadas del punto D.

$$\left|\frac{27t}{6}\right| = 18 \Rightarrow |27t| = 108 \Rightarrow |t| = \frac{108}{27} = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow D(1+t,1+t,1+t) = \boxed{D(5,5,5)} \\ t = -4 \Rightarrow D(1+t,1+t,1+t) = \boxed{D(-3,-3,-3)} \end{cases}$$

6: Considere las siguientes rectas:

$r: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ s: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

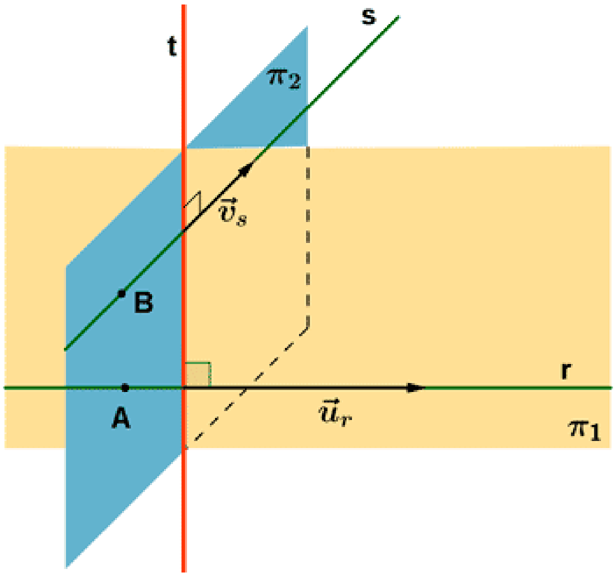
a) Los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales, $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes. Solo pueden cortarse o cruzarse.
Para ver cuál de estos dos casos es, usemos los vectores directores y el vector formado por un punto de cada recta:

$$P_r\left(5,6,-1\right) \text{ y } P_s\left(1,0,-1\right) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = \left(1,0,-1\right)-\left(5,6,-1\right) = \left(-4,-6,0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = \left(1,1,1\right) \\ \overrightarrow{v_s} = \left(1,1,-1\right) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = \left(-4,-6,0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0+4-6-\left(-4+0+6\right) = -4 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes y **las rectas se cruzan**.

b) **<u>Una forma de resolverlo</u>:**
Para hallar la recta t perpendicular a ambas rectas y que las corte a las dos, vamos a determinar los dos planos que contienen a cada una de las rectas y además tienen como vector director el perpendicular a ambas rectas. Observad el dibujo:



El vector normal a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,1,1)\\ \vec{v_s}=(1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-i+j+k-(k-j+i)=-2i+2j=(-2,2,0)$$

$$\vec{v_t}=(-1,1,0)$$

π_1 es el plano que contiene a la recta ***r*** con vectores directores $\vec{v_t}=(-1,1,0)$ y $\vec{v_r}=(1,1,1)$:

$$\pi_1:\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,1,1)\\ \vec{v_t}=(-1,1,0)\\ P_r(5,6,-1)\in\pi_1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow -y+6+z+1-(-z-1+x-5)=0$$

$$-y+6+z+1+z+1-x+5=0$$

$$\pi_1:-x-y+2z+13=0$$

π_2 es el plano que contiene a la recta ***s*** con vectores directores $\vec{v_t}=(-1,1,0)$ y $\vec{v_s}=(1,1,-1)$:

$$\pi_2:\left.\begin{array}{l}\vec{v_s}=(1,1,-1)\\ \vec{v_t}=(-1,1,0)\\ P_s(1,0,-1)\in\pi_2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow y+z+1-(-z-1-x+1)=0$$

$$y+z+1+z+1+x-1=0$$

$$\pi_2:x+y+2z+1=0$$

La recta pedida tiene por ecuación (implícita):

$$\boxed{t:\left.\begin{array}{r}-x-y+2z+13=0\\ x+y+2z+1=0\end{array}\right\}}$$

Otra forma de resolverlo:

Hallo el vector normal a ambas rectas que es el vector director de la recta t: $\vec{v_t}=(-1,1,0)$

Determino el plano π_1 que contiene a la recta r con vectores directores $\vec{v_t}=(-1,1,0)$ y $\vec{v_r}=(1,1,1)$:

$$\pi_1:-x-y+2z+13=0$$

Determino el punto de corte de este plano con la otra recta s:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : -x-y+2z+13=0 \\ s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x-y+2z+13=0 \\ x=1+t \\ y=t \\ z=-1-t\end{array}\right\} \Rightarrow -1-t-t-2-2t+13=0$$

$$-4t+10=0 \Rightarrow t=\frac{-10}{-4}=2,5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=1+2,5 \\ y=2,5 \\ z=-1-2,5\end{array}\right\} \Rightarrow Q(3,5;\,2,5;\,-3,5)$$

La recta t pedida tiene ecuación:

$$t:\left.\begin{array}{l}Q(3,5;\,2,5;\,-3,5)\in t \\ \vec{v_t}=(-1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\left.\begin{array}{l}x=3,5-t \\ y=2,5+t \\ z=-3,5\end{array}\right\}}$$

Una tercera forma de hacerlo:

El vector perpendicular a ambas rectas es $\vec{v_t}=(-1,1,0)$.

Las rectas tienen ecuaciones:

$$s:\left.\begin{array}{l}x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=-1-\mu\end{array}\right\} \quad y \quad r:\left.\begin{array}{l}x=5+\lambda \\ y=6+\lambda \\ z=-1+\lambda\end{array}\right\}$$

La recta ***t*** perpendicular a ambas rectas corta a ***r*** en un punto $A(5+\lambda,6+\lambda,-1+\lambda)$ y a la recta ***s*** en otro punto $B(1+\mu,\mu,-1-\mu)$

El vector $\overrightarrow{AB}=(1+\mu,\mu,-1-\mu)-(5+\lambda,6+\lambda,-1+\lambda)=(-4+\mu-\lambda,\mu-6-\lambda,-\mu-\lambda)$ y $\vec{v_t}=(-1,1,0)$ tienen la misma dirección, por lo que deben tener coordenadas proporcionales:

$$\frac{-4+\mu-\lambda}{-1}=\frac{\mu-6-\lambda}{1}=\frac{-\mu-\lambda}{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{-4+\mu-\lambda}{-1}=\dfrac{\mu-6-\lambda}{1} \\ \dfrac{\mu-6-\lambda}{1}=\dfrac{-\mu-\lambda}{0}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-4+\mu-\lambda=-\mu+6+\lambda \\ 0=-\mu-\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \mu=-\lambda \Rightarrow -4-\lambda-\lambda=\lambda+6+\lambda \Rightarrow$$

$$-2\lambda-2\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\frac{10}{-4}=-2,5$$

El punto A de la recta ***r*** que está en la recta ***t*** tiene coordenadas

$$A(5-2,5,6-2,5,-1-2,5)=(2,5,\,3,5,\,-3,5)$$

La recta pedida tiene ecuación:

$$t:\left.\begin{array}{l}A(2,5;\,3,5;\,-3,5)\in t \\ \vec{v_t}=(-1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\left.\begin{array}{l}x=2,5-\lambda \\ y=3,5+\lambda \\ z=-3,5\end{array}\right\}}$$

7: El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

a) X = Tiempo de duración en horas de una bombilla

X = N(μ, σ)

$P(X < 5061,2) = 0,6950$

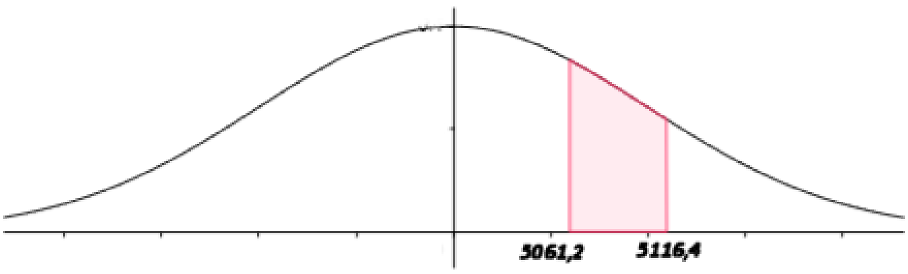
$P(X > 5116,4) = 0,1660$

Nos piden calcular $P(5061,2 < X < 5116,4)$.

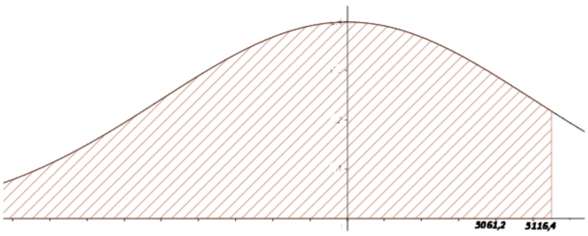
$$P(5061,2 < X < 5116,4) = P(X < 5116,4) - P(X < 5061,2) =$$
$$= (1 - P(X > 5116,4)) - P(X < 5061,2) =$$
$$= (1 - 0,1660) - 0,6950 = \boxed{0,1390}$$

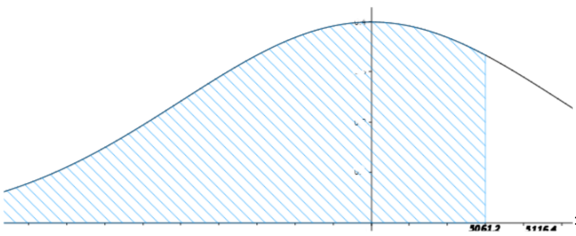
OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

Gráficamente:

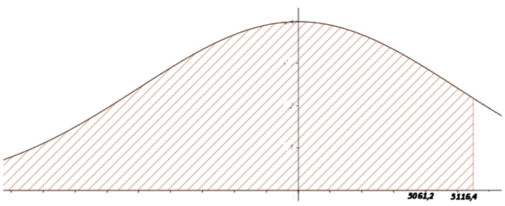


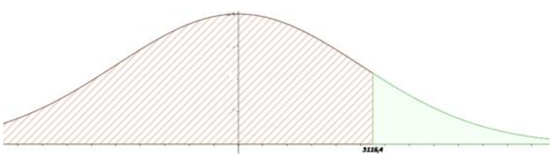
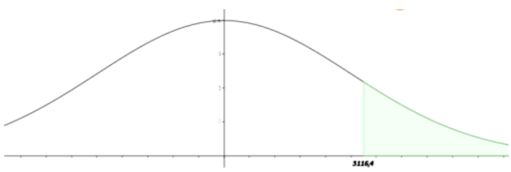
Es igual a:



–

=

Y además:


=

=

–

=

Por lo que

$$P(X > 5116,4) = 1 - P(X < 5116,4)$$

$$= 0,1660 = 1 - P(X < 5116,4)$$

$$P(X < 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$$

Juntando toda la información:

$$P(5061,2 < X < 5116,4) = P(X < 5116,4) - P(X < 5061,2) = 0,834 - 0,695 = \boxed{0,139}$$

b) Si tipificamos la distribución para poder usar la tabla de la N(0,1), tenemos que:

$$P(X < 5061,2) = 0,6950 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right) = 0,6950$$

Buscando en la tabla de la N(0,1) se cumple:

$$\frac{5061,2-\mu}{\sigma} = 0,51$$

Por el mismo procedimiento:

$$P(X > 5116,4) = 0,1660 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,1660$$

$$1 - P\left(Z < \frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,1660 \Rightarrow P\left(Z < \frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,834$$

Buscando en la tabla de la N(0,1) tenemos que

$$\frac{5116,4-\mu}{\sigma} = 0,97$$

Juntemos las dos igualdades y resolvamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5061,2-\mu}{\sigma} = 0,51 \\ \dfrac{5116,4-\mu}{\sigma} = 0,97 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5061,2-\mu = 0,51\sigma \\ 5116,4-\mu = 0,97\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow \mu = 5061,2 - 0,51\sigma$$

$$5116,4 - (5061,2 - 0,51\sigma) = 0,97\sigma \Rightarrow 5116,4 - 5061,2 = 0,97\sigma - 0,51\sigma$$

$$55,2 = 0,46\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{55,2}{0,46} = 120 \ horas}$$

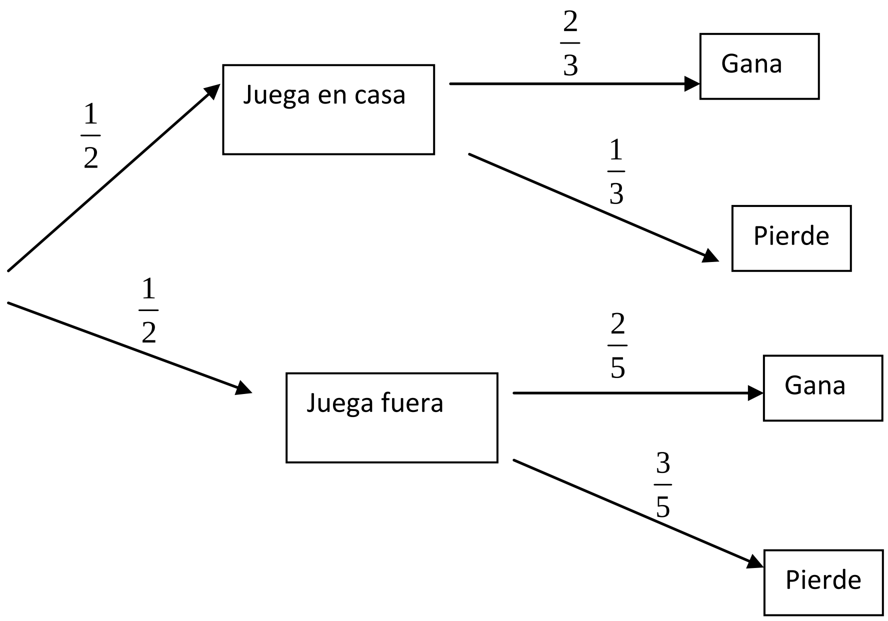
Y sustituyendo $\boxed{\mu = 5061,2 - 0,51\sigma = 5061,2 - 0,51 \cdot 120 = 5000 \ horas}$

8: La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) **[1 p.]** Sin saber donde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) **[1,5 p.]** Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

a) Construyamos el diagrama de árbol:



$$P(Gane) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

b)

$$P(\text{Jugara en casa sabiendo que ha ganado}) = P(\text{juegue en casa} / \textit{ganó}) =$$

$$= \frac{P(\text{juegue en casa y gane})}{P(gane)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$