Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA   EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EZOHIKOA   EXTRAORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKOMATEMATIKA II   MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x,y)=5x+4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y-x\geq 0 \\ y\leq 2x-3 \\ x+y\leq 9 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

A 2 [hasta 2.5 puntos]

Sea la función $f(x)=ax^3+bx+1$.

a) [0,75 puntos] Calcula los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* tenga un extremo relativo en el punto (1, –5).
b) [0,75 puntos] Para *a = 2* y *b = –6*, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función *f(x)*.
c) [1 punto] Para *a = 2* y *b = –6*, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y=2x+1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 [hasta 2,5 puntos]

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) [1 punto] Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
b) [0,75 puntos] ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
c) [0,75 puntos] Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 [hasta 2,5 puntos]

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.

Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) [1 punto] La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
b) [0,75 puntos] La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
c) [0,75 puntos] Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de “sobresaliente”, ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcular la inversa de la matriz $\left(A\cdot A^t\right)$.

b) [0,75 puntos] ¿Admite inversa la matriz $\left(A^t \cdot A\right)$?

c) [0,5 puntos] Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \qquad y \qquad A^t \cdot B$$

B 2 [hasta 2,5 puntos]

a) [0,5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) [0,75 puntos] Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c) [1,25 puntos] Hallar el área de la región limitada por la gráfica de *f(x)* y el eje de abscisas.

B 3 [hasta 2,5 puntos]

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) [1,5 puntos] Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) [1 punto] Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 [hasta 2,5 puntos]

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) [1 punto] Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) [0,75 puntos] Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) [0,75 puntos] ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

Soluciones

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x,y)=5x+4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y-x\geq 0 \\ y\leq 2x-3 \\ x+y\leq 9 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible. Para ello dibujo las rectas que la delimitan.

$2y-x=0$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
2	1

$y=2x-3$

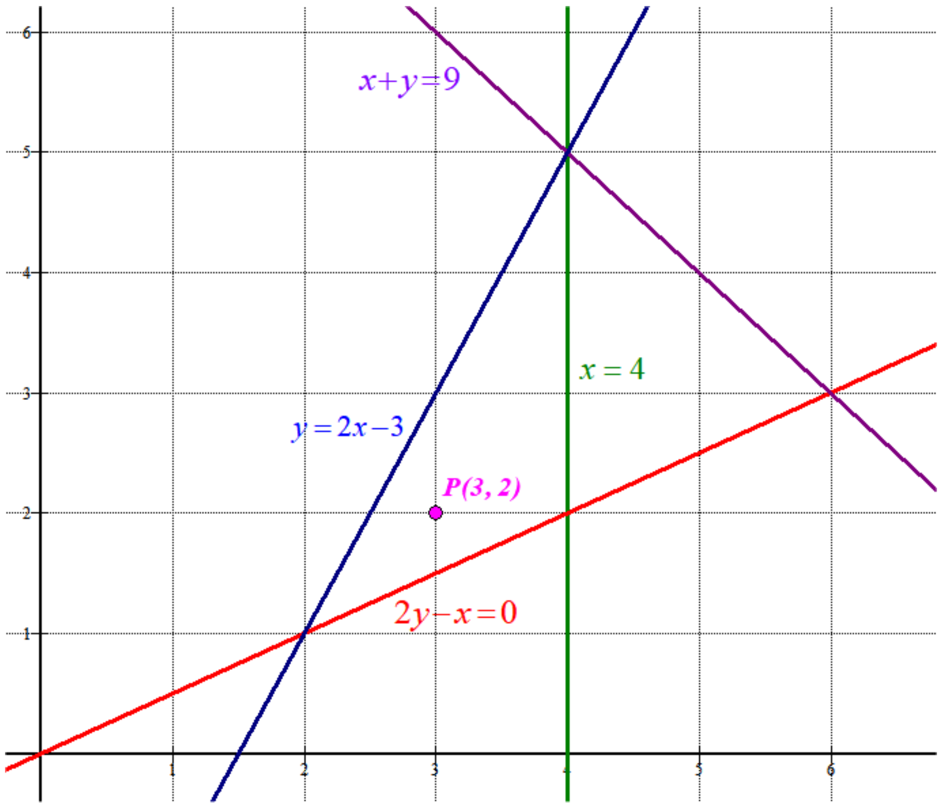
x	$y=2x-3$
0	-3
2	1
3	3

$x+y=9$

x	$y=9-x$
0	9
3	6
9	0

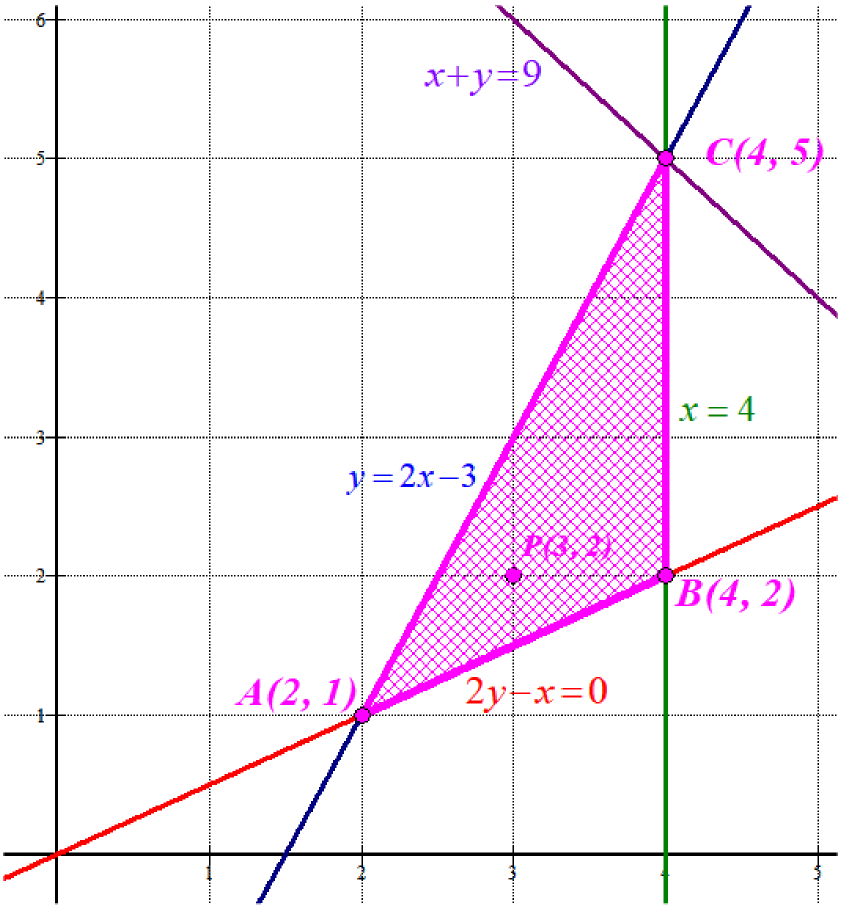
$x=4$

$x=4$	y
4	0
4	1



Comprobamos si el punto P(3, 2) cumple todas las inecuaciones.

$$\begin{cases} 4-3\geq 0 \\ 2\leq 6-3 \\ 3+2\leq 9 \\ 3\leq 4 \end{cases}$$ Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada.



Valoramos la función objetivo $F(x,y)=5x+4y$ en cada vértice en busca de su valor máximo.

A(2, 1) → $F(2,1)=10+4=14$
B(4,2) → $F(4,2)=20+8=28$
C(4,5) → $F(4,5)=20+20=40$

La función objetivo toma un valor máximo de 40 en el punto C(4, 5), para $x = 4$ e $y = 5$.

A 2 [hasta 2.5 puntos]

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) [0,75 puntos] Calcula los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* tenga un extremo relativo en el punto (1, –5).

b) [0,75 puntos] Para *a* = *2* y *b* = *–6*, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función *f(x)*.

c) [1 punto] Para *a* = *2* y *b* = *–6*, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

a) Si la función presenta un extremo es que pasa por el punto (1, –5) por lo que *f(1)*= *–5*.

$$f(1) = -5 \Rightarrow a + b + 1 = -5$$

Por ser un extremo se anula la derivada en *x* = *1*, es decir, *f ´(1)* = *0*.

$$f(x) = ax^3 + bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$$

Juntamos las dos condiciones y resolvemos el sistema que forman.

$$\left.\begin{matrix} a + b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = -a - 6 \\ 3a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3a - a - 6 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 3} \Rightarrow \boxed{b = -3 - 6 = -9}$$

b) Para *a* = *2* y *b* = *–6* la función queda $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

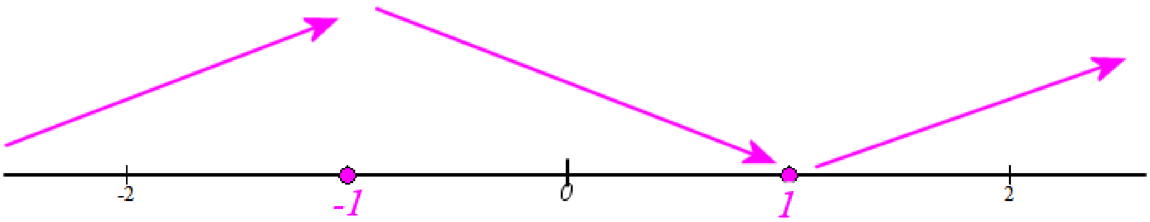
Hacemos la derivada e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores obtenidos.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos *x* = *–2*, la derivada vale $f'(-2) = 24 - 6 = 18 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos *x* = *0*, la derivada vale $f'(0) = -6 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos *x* = *2*, la derivada vale $f'(2) = 24 - 6 = 18 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.



Según este esquema de evolución de la función existe un máximo en *x* = *–1* y un mínimo en *x* = *1*.

Como $f(-1) = -2 + 6 + 1 = 5$ y $f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$ el punto máximo tiene coordenadas $(-1, 5)$ y el punto mínimo $(1, -3)$.

Falta determinar el punto de inflexión, para ello utilizo la segunda derivada.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 \Rightarrow f''(x) = 12x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Como\ f'''(x) = 12 \Rightarrow f'''(0) = 12 \neq 0$$

En $x = 0$ hay un punto de inflexión $(f(0)=1)$ de coordenadas $(0,1)$.

c) Para $a = 2$ y $b = -6$ la función queda $f(x)=2x^3-6x+1$.

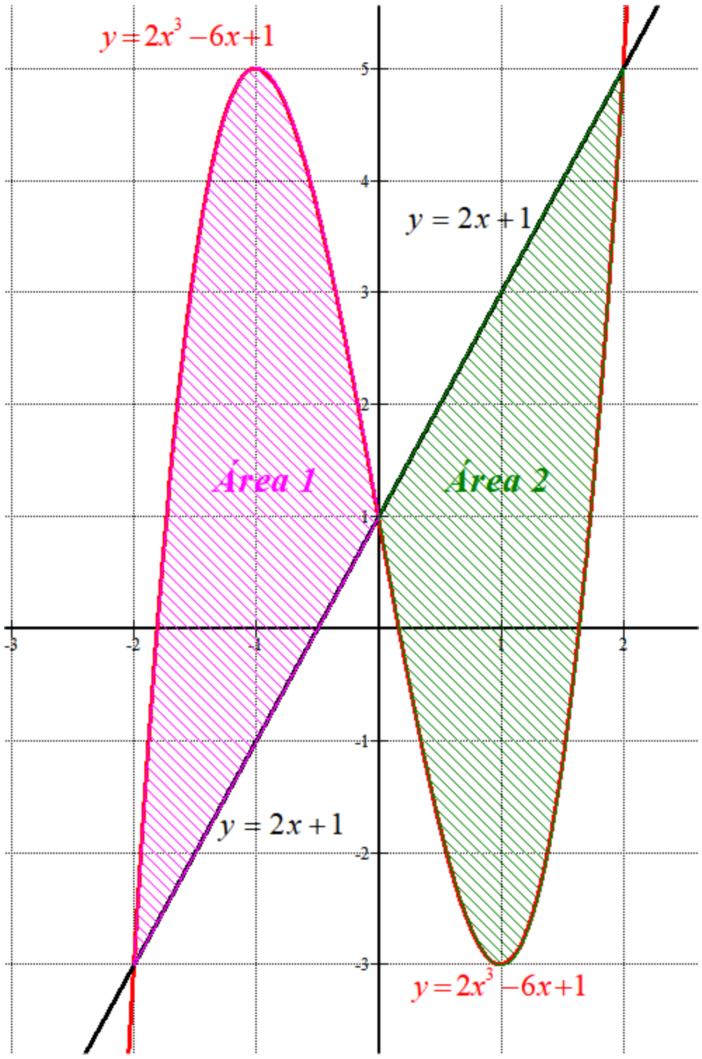
Hallamos los puntos de corte.

$$2x+1=2x^3-6x+1 \Rightarrow 2x^3-8x=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

Dibujamos la curva $f(x)=2x^3-6x+1$ y la recta $y=2x+1$ entre –2 y 2.

x	$y=2x^3-6x+1$
-2	$-16+12+1=-3$
-1	$-2+6+1=5$
0	1
1	$1-6+1=-4$
2	$16-12+1=5$

x	$y=2x+1$
-2	-3
0	1
2	5



El área la calculamos en dos partes, usando la integral definida.

$$Área1=\int_{-2}^{0} 2x^3-6x+1-(2x+1)\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{0} 2x^3-8x\,dx=\left[2\frac{x^4}{4}-8\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^4}{2}-0\right]-\left[\frac{(-2)^4}{2}-4(-2)^2\right]=8\,u^2$$

$$Área2=\int_{0}^{2} 2x+1-\left(2x^3-6x+1\right)dx=\int_{0}^{2}-2x^3+8x\,dx=\left[-2\frac{x^4}{4}+8\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{2}+4x^2\right]_{0}^{2}=\left[-\frac{2^4}{2}+16\right]-\left[\frac{0^4}{2}-0\right]=8\,u^2$$

El área total es la suma de ambas, por lo que vale 8 + 8 = 16 u^2.

A 3 [hasta 2,5 puntos]

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) [1 punto] Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

b) [0,75 puntos] ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

c) [0,75 puntos] Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Se estudian dos características que se mezclan entre sí, hacemos una tabla de contingencia para aclarar la información aportada y obtener datos a partir de ella.

	Chico	Chica	
Nacido en la ciudad		**54**	**90**
No nacido en la ciudad			
	42		**100**

Completamos la tabla.

	Chico	Chica	
Nacido en la ciudad	**36**	**54**	**90**
No nacido en la ciudad	**6**	**4**	**10**
	42	**58**	**100**

Ya podemos responder a las preguntas que se planteen haciendo uso de la regla de Laplace, pues cualquier alumno tiene la probabilidad de ser elegido al azar.

a) De las 100 personas solo 10 son no nacidos en la ciudad.

$$P(\text{No nacido en la ciudad}) = \boxed{\frac{10}{100} = 0{,}1}$$

b) De las 100 personas solo 4 son chicas nacidas en la ciudad.

$$P(\textit{Sea chica y no haya nacido en la ciudad}) = \boxed{\frac{4}{100} = 0{,}04}$$

c) Es una probabilidad condicionada, por lo que los elementos posibles ya no son 100 sino solamente los 90 nacidos en la ciudad.
De los 90 nacidos en la ciudad 36 son chicos.

$$P(\text{Sea chico / Nacido en la ciudad}) = \frac{36}{90} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4}$$

A 4 [hasta 2,5 puntos]
Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.
Se elige un estudiante al azar. Calcula:
a) [1 punto] La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
b) [0,75 puntos] La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
c) [0,75 puntos] Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de "sobresaliente", ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

X = Nota obtenida por un estudiante en una asignatura.
X = N(6,2; 2)

a)

$$P(X>7)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{7-6,2}{2}\right)=P(Z>0,4)=$$

$$=1-P(Z\leq 0,4)=1-0,6554=\boxed{0,3446}$$

b)

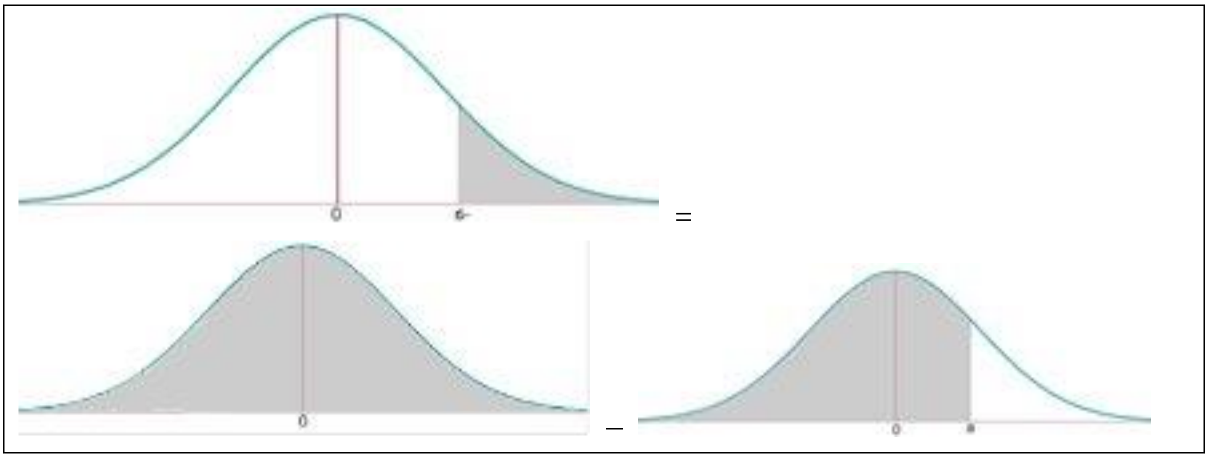
$$P(5\leq X\leq 8)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{5-6,2}{2}\leq Z\leq\frac{8-6,2}{2}\right)=P(-0,6\leq Z\leq 0,9)=$$

$$=P(Z\leq 0,9)-P(Z\leq -0,6)=P(Z\leq 0,9)-P(Z>0,6)=P(Z\leq 0,9)-\left(1-P(Z\leq 0,6)\right)=$$

$$=0,8159-1+0,7257=\boxed{0,5416}$$

c) Deseamos averiguar "a" tal que $P(X\geq a)=0,25$.

$$P(X\geq a)=0,25\Rightarrow P\left(Z\geq\frac{a-6,2}{2}\right)=0,25$$



$$P\left(Z\geq\frac{a-6,2}{2}\right)=0,25\Rightarrow 1-P\left(Z<\frac{a-6,2}{2}\right)=0,25\Rightarrow P\left(Z<\frac{a-6,2}{2}\right)=0,75$$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) y encontramos que $\frac{a-6,2}{2}=0,675$. Despejamos y averiguamos el valor de "a".

$$\frac{a-6,2}{2}=0,675\Rightarrow a-6,2=1,35\Rightarrow\boxed{a=7,55}$$

A partir de 7,55 se ha puesto "Sobresaliente"

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcular la inversa de la matriz $\left(A\cdot A^t\right)$.

b) [0,75 puntos] ¿Admite inversa la matriz $\left(A^t\cdot A\right)$?

c) [0,5 puntos] Calcular, cuando sea posible:

$$A\cdot B \qquad y \qquad A^t\cdot B$$

a) Calculamos el determinante para comprobar si tiene inversa.

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1+4 & 0+2+6 \\ 0+2+6 & 1+4+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left|A\cdot A^t\right|=\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}=70-64=6\neq 0$$

La matriz tiene inversa, la calculamos con la fórmula.

$$\left(A\cdot A^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A\cdot A^t\right)}{\left|A\cdot A^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} +14 & -8 \\ -8 & +5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

b) $$\left(A^t\cdot A\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1 & 0+2 & 0+3 \\ 0+2 & 1+4 & 2+6 \\ 0+3 & 2+6 & 4+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y vemos si es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix}=65+48+48-45-52-64=0$$

La matriz $\left(A^t\cdot A\right)$ no tiene inversa.

c) Comprobamos si el producto es posible y lo calculamos cuando lo sea.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=No\ es\ posible$$

$$2\times\boxed{3 \cdot 2}\times 2$$

$$A^t\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0 & 0-1 \\ 2+0 & 1-2 \\ 4+0 & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2 \cdot 2}\times 2 = 3\times 2$$

B 2 [hasta 2,5 puntos]

a) [0,5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) [0,75 puntos] Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c) [1,25 puntos] Hallar el área de la región limitada por la gráfica de *f(x)* y el eje de abscisas.

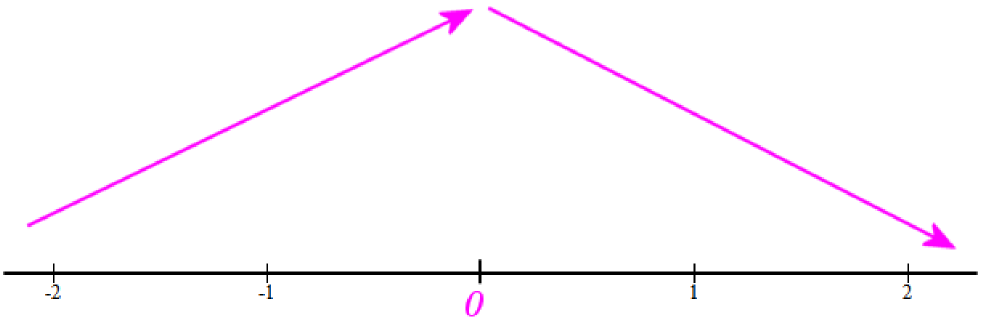
a) Es una parábola por lo que tendrá un máximo o mínimo.

$y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x$

$y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $y'(-1) = -2(-1) = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $y'(1) = -2(1) = -2 < 0$. La función decrece en $(0, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.



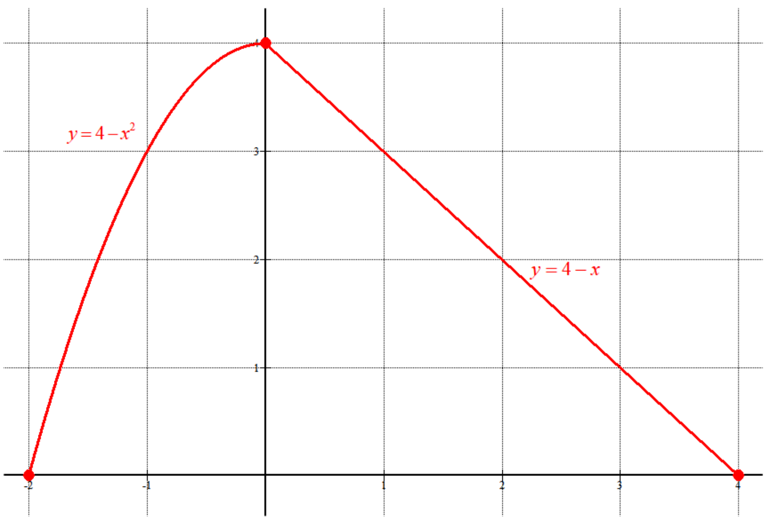
La función presenta un máximo relativo en *x* = *0*.

Como $y(0) = 4 - 0^2 = 4$ el máximo relativo tiene coordenadas (0, 4).

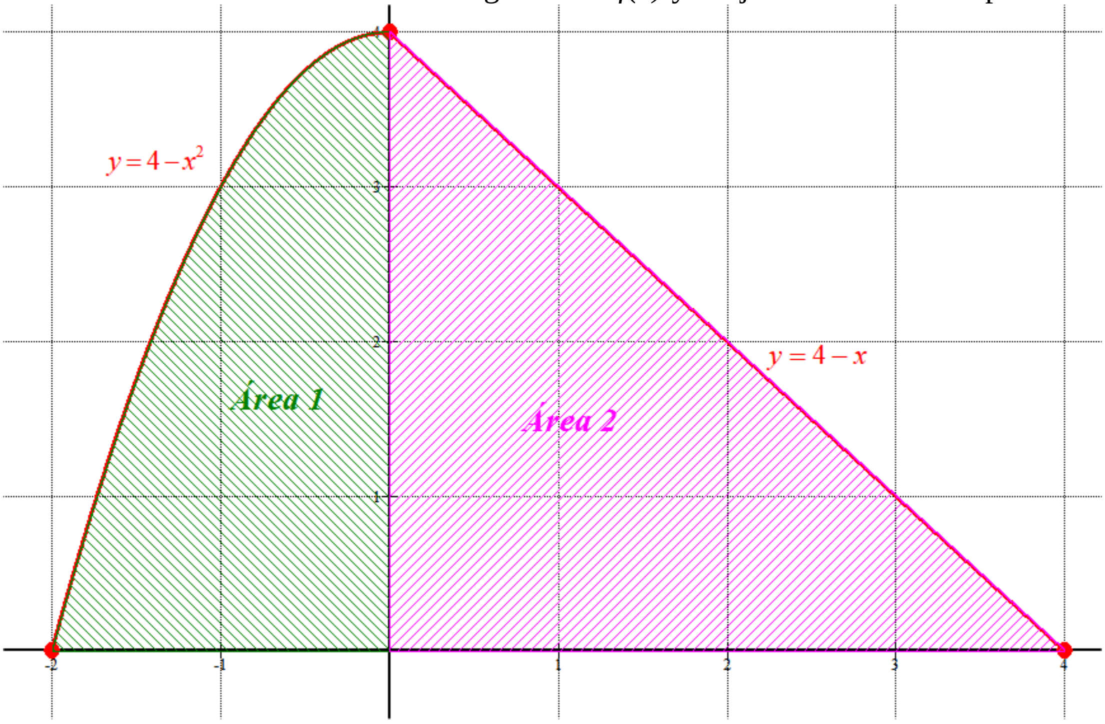
b) La función definida a trozos en un trozo de parábola y un trozo de recta. Hacemos una tabla de valores de cada parte y se puede representar.

x	$y = 4 - x^2 \quad si \quad -2 \leq x < 0$
-2	0
-1	$4 - 1 = 3$
0	4 No se incluye

x	$y = 4 - x \quad si \quad 0 \leq x \leq 4$
0	4
4	0



c) El área del recinto encerrado entre la gráfica de *f(x)* y el eje se divide en dos partes.



El área 2 es un triángulo de base 4 y altura 4 por lo que:

$$\text{Área } 2 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\,u^2$$

El área 1 es una integral definida entre –2 y 0 de la función $y = 4 - x^2$.

$$\text{Área } 1 = \int_{-2}^{0} 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \left[0 - \frac{0^3}{3}\right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\,u^2$$

El área total es $8 + \frac{16}{3} = \boxed{\frac{40}{3} = 13{,}33\,u^2}$

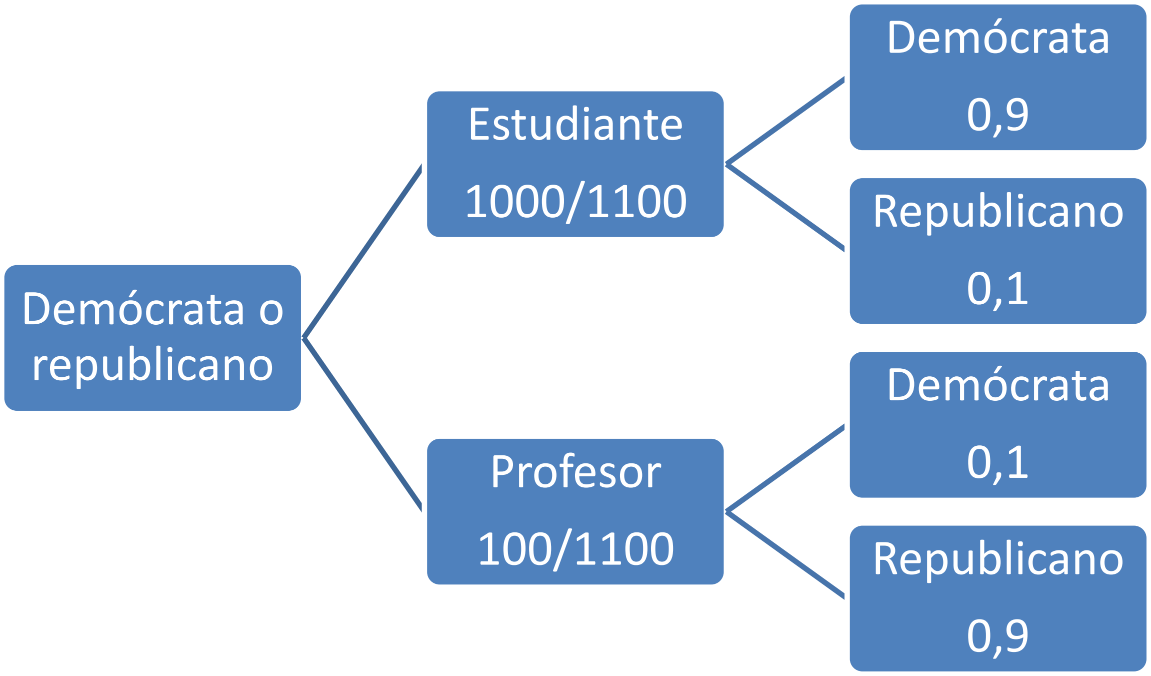
B 3 [hasta 2,5 puntos]

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) [1,5 puntos] Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) [1 punto] Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P\left(Sea\ republicana\right)=\frac{1000}{1100}0{,}1+\frac{100}{1100}0{,}9=\boxed{\frac{19}{110}=0{,}172}$

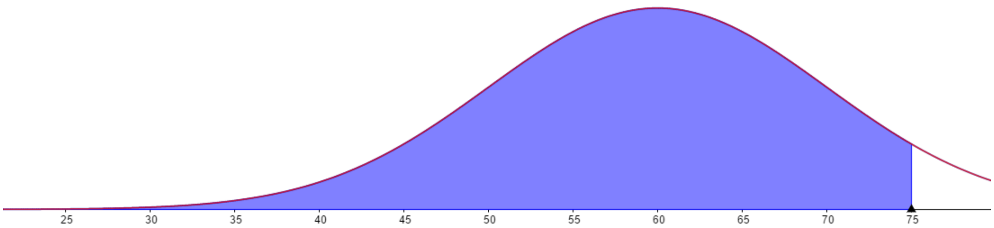
b) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P\left(Sea\ estudiante\,/\,Es\ republicano\right)=\frac{P\left(Sea\ estudiante\cap Es\ republicano\right)}{P\left(Sea\ republicano\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1000}{1100}0{,}1}{\frac{190}{1100}}=\boxed{\frac{10}{19}=0{,}526}$$

B 4 [hasta 2,5 puntos]
El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.
a) [1 punto] Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?
b) [0,75 puntos] Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?
c) [0,75 puntos] ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

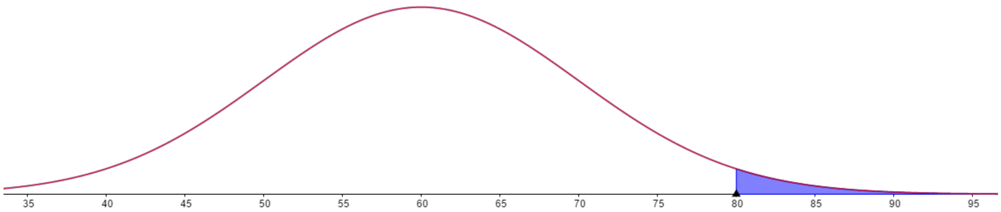
a) X = Tiempo en minutos que necesita un alumno para finalizar un examen.
X = N(60, 10)



$$P(X \le 75) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \le 1,5) = 0,9332$$

La proporción de alumnos que conseguirán finalizarlo es del 93,32%

b)

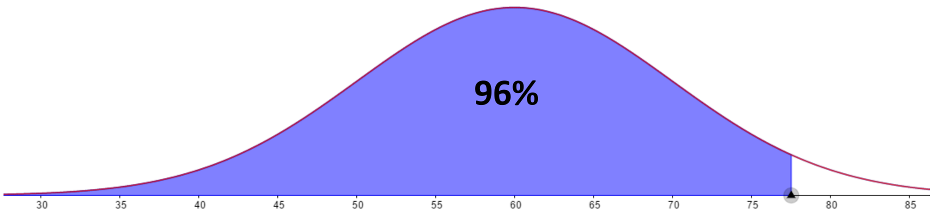


$$P(X > 80) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{80-60}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

La proporción de alumnos que no conseguirán finalizarlo es del 2,28%.

c) Nos piden encontrar “a” tal que $P(X \le a) = 0,96$.



$$P(X \le a) = 0,96 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-60}{10}\right) = 0,96 \Rightarrow \frac{a-60}{10} = 1,75$$

$$a - 60 = 17,5 \Rightarrow \boxed{a = 77,5 \text{ minutos}}$$