Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EKAINA
ORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKOMATEMATIKA II
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **<u>que no presenten</u>** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

A 1 [hasta 2.5 puntos]

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad donde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 puntos] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial.

A 2 [hasta 2.5 puntos]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) [1 punto] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 [hasta 2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 [hasta 2,5 puntos]

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) [1,5 puntos] Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?

b) [1 punto] Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- ♦ La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- ♦ La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 [hasta 2,5 puntos]

Sea la siguiente función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) [0,5 puntos] Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) [0,5 puntos] Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \dfrac{x}{2}$.

d) [0,5 puntos] Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x=0$ toma el valor 1.

B 3 [hasta 2,5 puntos]

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A)=0,6, P(B)=0,5$ y $P(A\cap B)=0,4$. Calcula:

a) [0,65 puntos] $P(A\cup B)$

b) [0,6 puntos] $P\left(A^C \cap B^C\right)$

c) [0,6 puntos] $P\left(A^C \cap B\right)$

d) [0,65 puntos] $P(A/B)$

B 4 [hasta 2,5 puntos]

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?

b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

Soluciones

A 1 [hasta 2.5 puntos]
Se considera la ecuación matricial:

$$A\cdot X = A^t \cdot B \quad donde \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \; y \; B=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

a) [0,5 puntos] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial.

a) Supongamos la matriz X es de dimensión *mxn*.

$$A\cdot X \quad = \quad A^t\cdot B$$

$$3\times\boxed{3\cdot m}\times n \rightarrow 3\times\boxed{3\cdot 3}\times 1$$

Para poder realizarse $A\cdot X$ debe ser $m=3$.
Una vez hecho el producto $A\cdot X$ obtenemos una matriz $3\times$n que debe ser de la misma dimensión que la matriz resultante de $A^t\cdot B$ que es 3×1.
Luego debe ser $n = 1$.

La matriz X debe ser de dimensión *3x1*.

b) Si $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ entonces:

$$A\cdot X = A^t\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a+2b-c\\ b+2c\\ a+2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+2\\ 2+0+4\\ -1+0+0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}a+2b-c=3\\ b+2c=6\\ a+2b=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a+2b-c=3\\ b+2c=6\\ a=-1-2b\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-1-2b+2b-c=3\\ b+2c=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-1-c=3\\ b+2c=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\boxed{c=-4}\\ b+2c=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b-8=6 \Rightarrow \boxed{b=14} \Rightarrow \boxed{a=-1-28=-29}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-29\\14\\-4\end{pmatrix}}$$

A 2 [hasta 2.5 puntos]
Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x\le 1 \\ ax+2 & si \quad 1<x\le 2 \end{cases}$$

a) [1 punto] Determina el valor del parámetro *a* para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x=1$.
b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función cuando $a=2$.
c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a=2$.

a) Para que sea continua en $x=1$ debe existir el valor de la función y debe coincidir con los limites laterales:

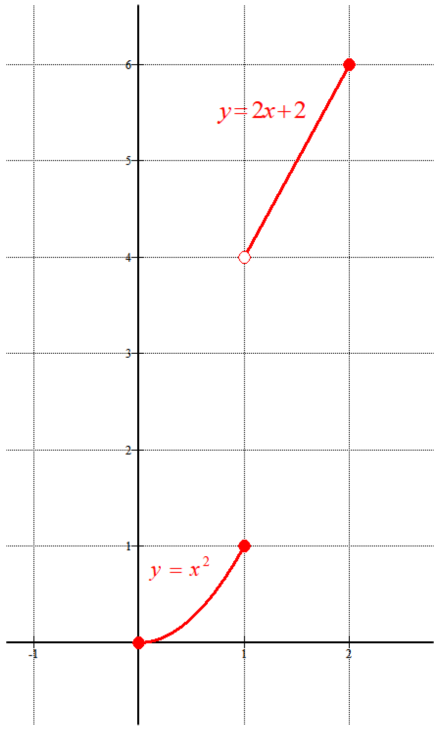
$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} ax+2=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=a+2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

b) Para $a=2$ la función es $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x\le 1 \\ 2x+2 & si \quad 1<x\le 2 \end{cases}$.

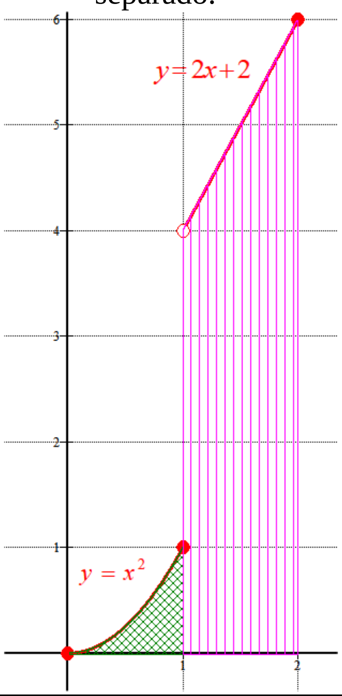
Hacemos una tabla de valores de cada rama (recta y parábola).

x	$y=x^2\ (0\le x\le 1)$
0	0
0.5	0.25
1	1

x	$y=2x+2\ \ (1<x\le 2)$
1	4 No se incluye
1.5	5
2	6



c) El Área se divide en dos partes que calculamos por separado.



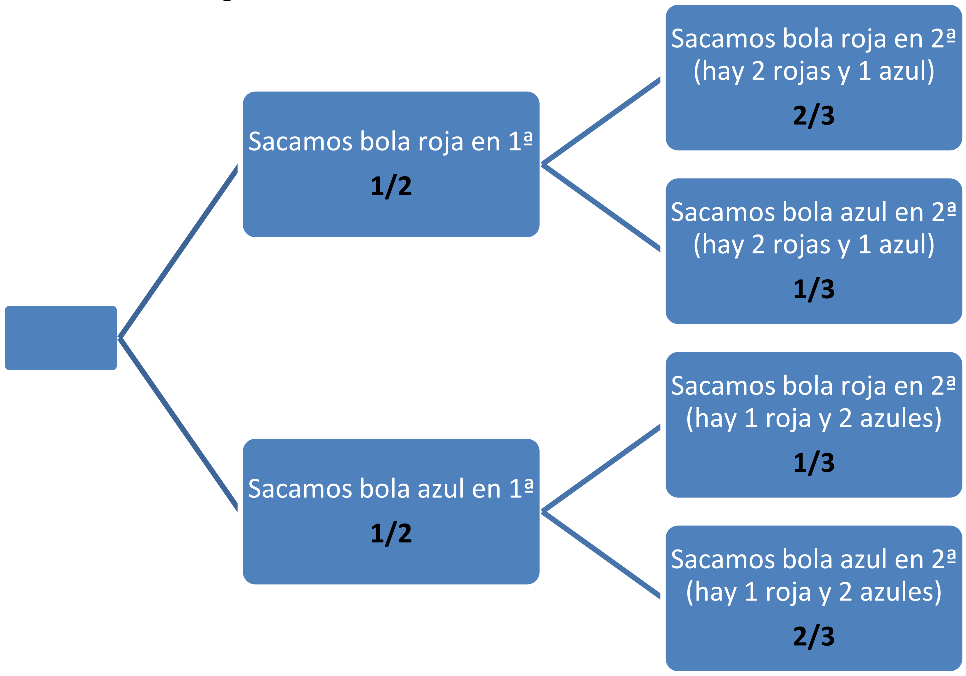
$$Área=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 2x+2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x^2+2x\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{0^3}{3}\right]+\left[2^2+4\right]-\left[1^2+2\right]=$$

$$=\frac{1}{3}+8-3=\boxed{\frac{16}{3}=5.33\,u^2}$$

A 3 [hasta 2,5 puntos]
En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.
a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul
b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Es una probabilidad condicionada.

$$P(2^{\text{a}}\text{ bola extraída sea roja / La }1^{\text{a}}\text{ que se ha sacado era azul}) = \boxed{\frac{1}{3} = 0.33}$$

b) Ocurre en dos ramas del diagrama de árbol, hallamos la probabilidad de cada rama y las sumamos. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

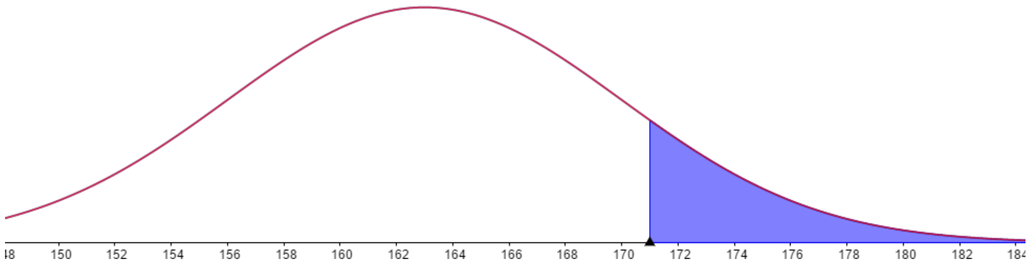
$$P(\text{Segunda bola azul}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P(1^{\text{a}}\text{ roja / }2^{\text{a}}\text{ es azul}) = \frac{P(1^{\text{a}}\text{ roja } \cap 2^{\text{a}}\text{ es azul})}{P(2^{\text{a}}\text{ es azul})} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{3} = 0.33}$$

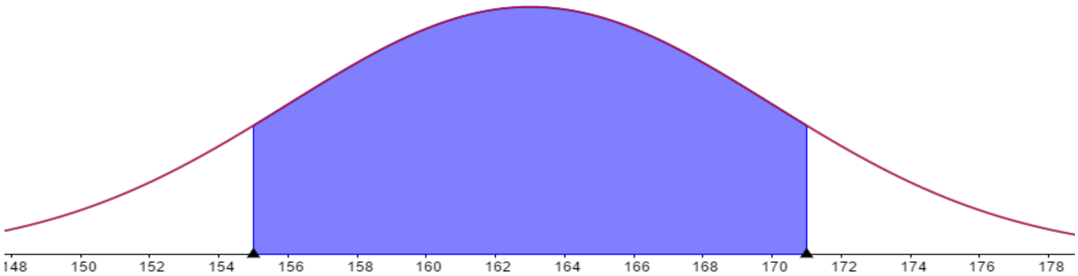
A 4 [hasta 2,5 puntos]
La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.
a) [1,5 puntos] Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
b) [1 punto] Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

a) X = Altura en centímetros de una mujer.
X= N(163, 7)



$$P(X>171)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{171-163}{7}\right)=P(Z>1.14)=$$

$$=1-P(Z\leq 1.14)=1-0.8729=\boxed{0.1271}$$

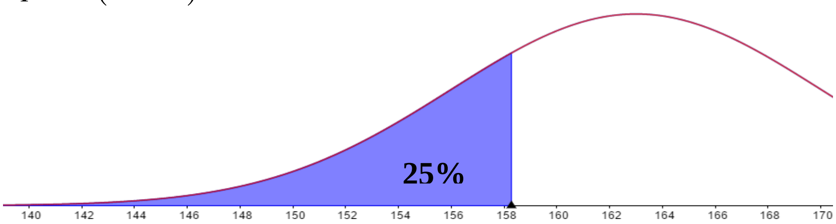


$$P(155<X<171)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{155-163}{7}<Z<\frac{171-163}{7}\right)=$$

$$=P(Z<1.14)-P(Z<-1.14)=P(Z<1.14)-P(Z>1.14)=$$

$$=P(Z<1.14)-\left[1-P(Z<1.14)\right]=2\cdot 0.8728-1=\boxed{0.7458}$$

b) Busco "a" tal que $P(X\leq a)=0.25$.



Si tipificamos tenemos que:

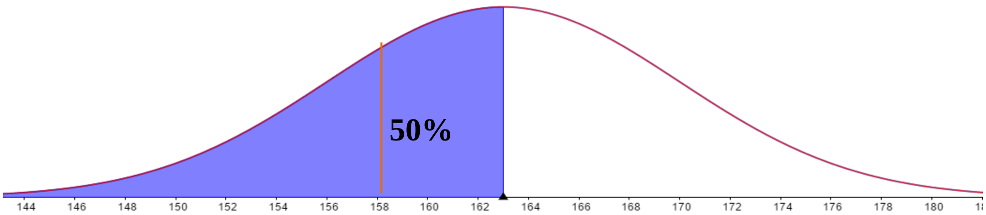
$$P\left(Z \le \frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \ge -\frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \Rightarrow 1 - P\left(Z \ge -\frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \ge -\frac{a-163}{7}\right) = 0.75$$

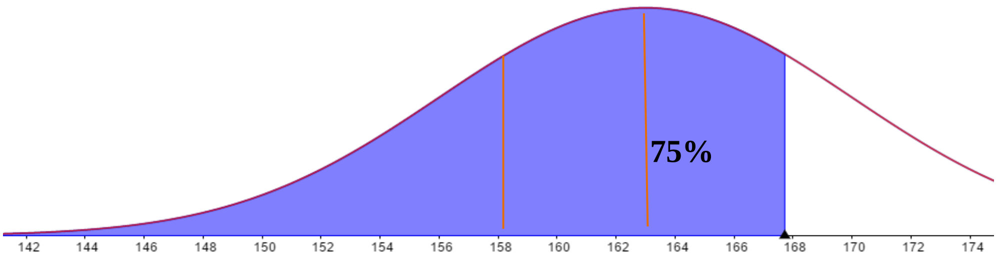
Mirando en la tabla tenemos que:

$$-\frac{a-163}{7} = 0.675 \Rightarrow a - 163 = -4,725 \Rightarrow \boxed{a = 158.275\ cm}$$

Debemos de averiguar la altura que deja la mitad de la población, pero este es la media de la distribución, es decir, 163 cm.



De la misma forma averiguamos el valor de “b” tal que $P(X \le b) = 0.75$.



Si tipificamos tenemos que:

$P\left(Z \le \frac{b-163}{7}\right) = 0.75$. Mirando en la tabla tenemos que:

$$\frac{b-163}{7} = 0.675 \Rightarrow \boxed{b = 167.725\ cm}$$

Las alturas que deben separar en cuatro partes iguales a la población de mujeres son: $\boxed{\text{158.275 cm, 163 cm y 167.725 cm}}$.

B 1 [hasta 2,5 puntos]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- ♦ La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- ♦ La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

Llamamos "x" al número de paquetes de la agencia A e ·y" al número de paquetes de la agencia B.

Hacemos una tabla.

	Nº tickets museo	Nº tickets visita	Nº tickets espectáculo	Coste
Nº paquetes de A (x)	6x	4x	4x	210x
Nº paquetes de B (y)	4y	6y	4y	230y
	$6x+4y$	$4x+6y$	$4x+4y$	$210x+230y$

La función objetivo es el coste que viene dado por la expresión $C(x,y)=210x+230y$ que deseamos hacer mínimo.

Las restricciones son:

"*quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo*" → $6x+4y\geq 16$
"*quiere comprar al menos 20 para realizar una visita guiada*" → $4x+6y\geq 20$
"*quiere comprar al menos 16 para asistir a un espectáculo*" → $4x+4y\geq 16$
Además las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0; \quad y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6x+4y\geq 16 \\ 4x+6y\geq 20 \\ 4x+4y\geq 16 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 8 \\ 2x+3y\geq 10 \\ x+y\geq 4 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

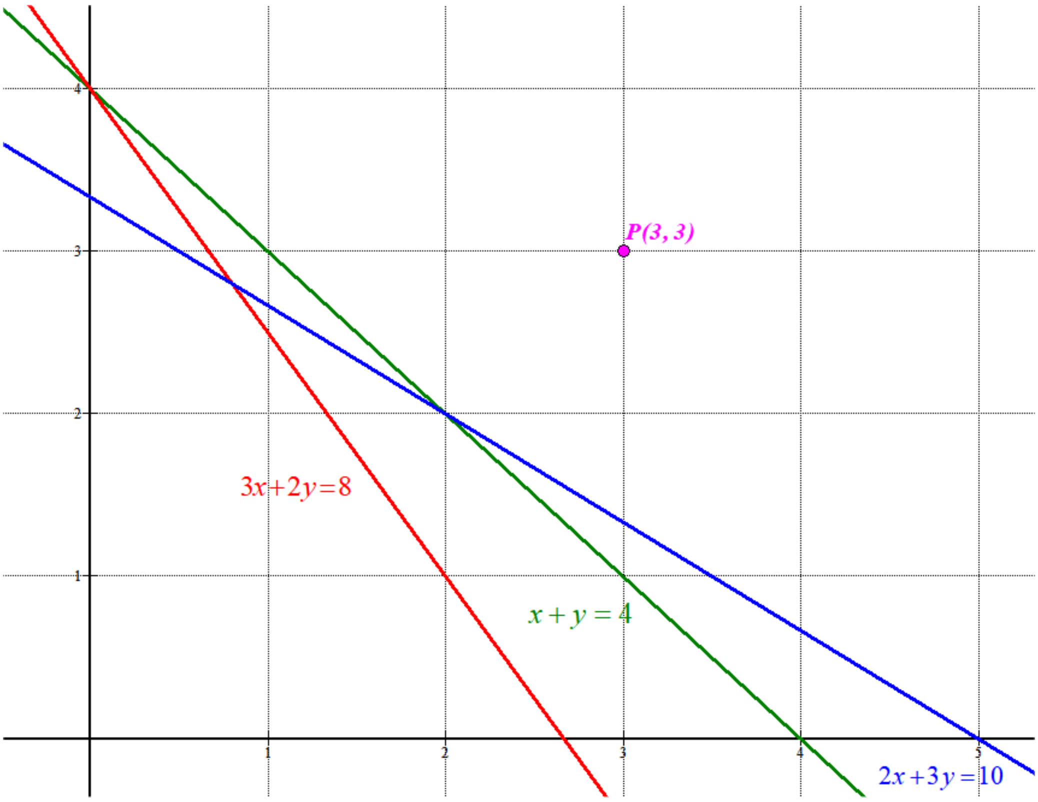
Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=8$ $\quad$ $2x+3y=10$ $\quad$ $x+y=4$ $\quad$ $\boxed{x\geq 0; \quad y\geq 0}$ Primer cuadrante

x	$y=\frac{8-3x}{2}$
0	4
2	1

x	$y=\frac{10-2x}{3}$
0	3.33
2	2
5	0

x	$y=4-x$
0	4
2	2
4	0



Vemos si el punto P(3, 3) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 9+6\geq 8 \\ 6+9\geq 10 \\ 3+3\geq 4 \\ 3\geq 0;\quad 3\geq 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen y la zona rayada es la región factible.

Valoramos la función coste $C(x,y)=210x+230y$ en cada uno de los vértices en busca de un coste mínimo.

A(0, 4) → $C(0,4)=920$

B(2, 2) → $C(2,3)=420+460=880$

C(5, 0) → $C(5,0)=1050$

El coste mínimo se produce en el vértice B(2, 2). Significa que comprando 2 paquetes de cada agencia el coste es mínimo, de 880 €.

B 2 [hasta 2,5 puntos]

Sea la siguiente función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) [0,5 puntos] Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) [0,5 puntos] Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y=\frac{x}{2}$.

d) [0,5 puntos] Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x=0$ toma el valor 1.

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

Hay dos puntos críticos $x=-1$ y $x=1$.

Veamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-4+1}{(4+1)^2}<0$.

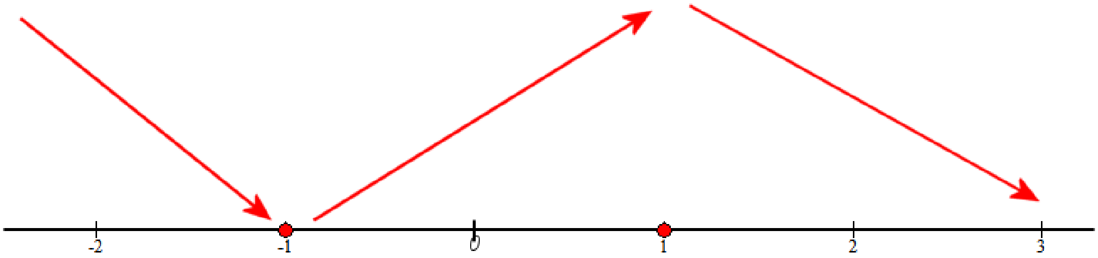
  La función decrece en $(-\infty,-1)$.

- En $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{1}{(1)^2}>0$.

  La función crece en $(-1,1)$

- En $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-4+1}{(4+1)^2}<0$.

  La función decrece en $(1,+\infty)$.



La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

Presenta un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$.

En estos puntos la función vale $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=-\frac{1}{2}$ y $f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$

El punto mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

El punto máximo relativo tiene coordenadas $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

b) Asíntota vertical. $x = a$

No hay pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

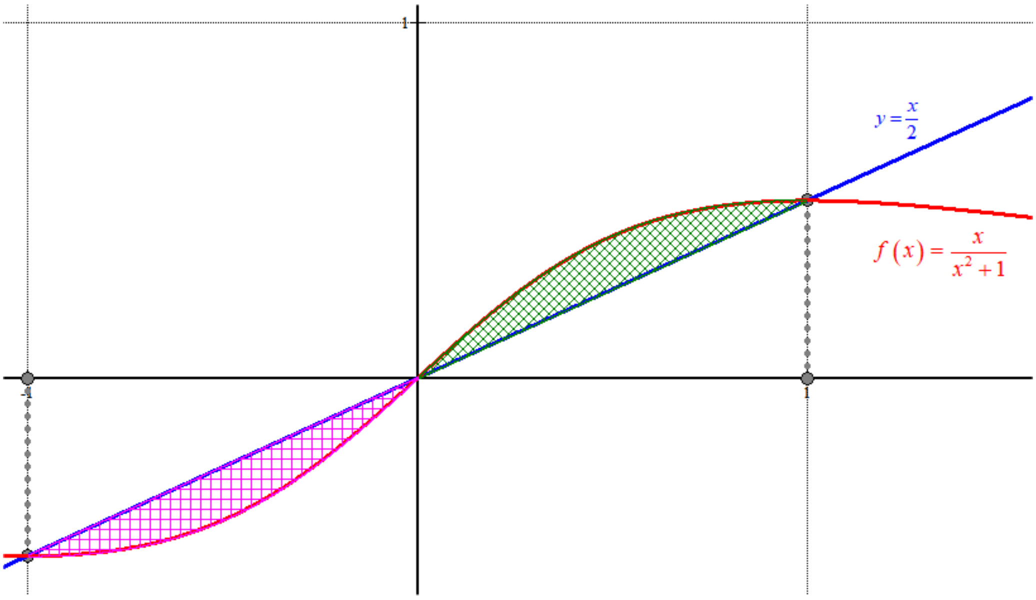
c) Averiguamos los puntos de corte de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ y la recta $y = \dfrac{x}{2}$.

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x = x^3 + x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x\left(x^2-1\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Hay 3 puntos de corte, dibujamos las dos funciones entre –1 y 1.

x	$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
–2	–0.4
–1	–0.5
0	0
1	0.5
2	0.4

x	$y = \dfrac{x}{2}$
–1	–0.5
0	0
1	0.5



d) La primitiva de la función $f(x)$ es:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + C$$

Sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1 entonces *F(0) = 1*.

$$F(0) = \frac{1}{2} \ln\left(0^2+1\right) + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Por lo que la primitiva buscada es $\boxed{F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + 1}$

B 3 [hasta 2,5 puntos]

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

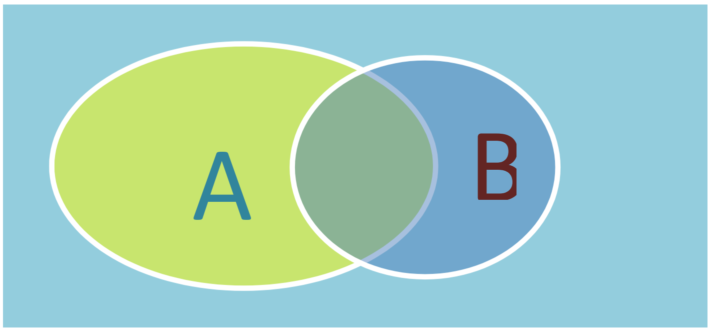
Se sabe que $P(A)=0,6,\ P(B)=0,5\ y\ P(A\cap B)=0,4$. Calcula:

a) [0,65 puntos] $P(A\cup B)$

b) [0,6 puntos] $P(A^C\cap B^C)$

c) [0,6 puntos] $P(A^C\cap B)$

d) [0,65 puntos] $P(A/B)$



a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,5-0,4=\boxed{0,7}$

b) $P(A^C\cap B^C)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=1-0,7=\boxed{0,3}$

c) $P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0,5-0,4=\boxed{0,1}$

d) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,4}{0,5}=\boxed{0,8}$

También se puede hacer con una tabla pasando las probabilidades a valores absolutos.

	A	**A^c**	
B	**40**		**50**
B^C			
	60		**100**

La completamos.

	A	**A^c**	
B	**40**	**10**	**50**
B^C	**20**	**30**	**50**
	60	**40**	**100**

Con estos datos las respuestas son:

a) $P(A\cup B)=\dfrac{40+10+20}{100}=\boxed{0,7}$

b) $P(A^C\cap B^C)=\dfrac{30}{100}=\boxed{0,3}$

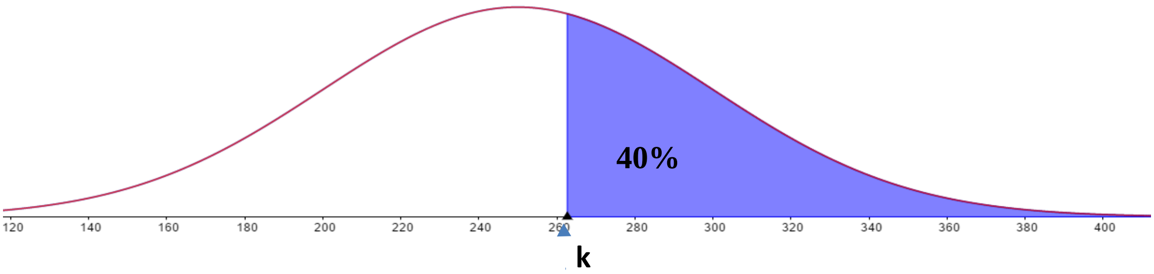
c) $P(A^C\cap B)=\dfrac{10}{100}=\boxed{0,1}$

d) $P(A/B)=\dfrac{40}{50}=\boxed{0,8}$

B 4 [hasta 2,5 puntos]
El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.
a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

X = Peso en gramos de una trucha de una piscifactoría
X = N(250, 50)

a) Buscamos "a" para que:



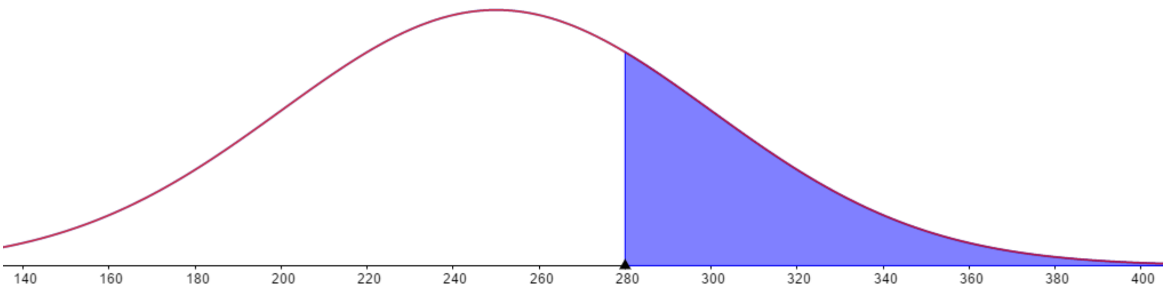
$$P(X>a)=0,4\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{a-250}{50}\right)=0,4\Rightarrow 1-P\left(Z\le\frac{a-250}{50}\right)=0,4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a-250}{50}\right)=1-0,4=0,6\Rightarrow\{Buscamos\ en\ la\ tabla\}\Rightarrow\frac{a-250}{50}=0,255\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=250+50\cdot 0,255=262,75}$$

El peso mínimo tiene que ser de 262,75 gramos.

b)



$$P(X>280)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{280-250}{50}\right)=P(Z>0,6)=$$

$$=1-P(Z\le 0,6)=\{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\}=1-0,7257=\boxed{0,2743}$$

El 27,43 % de las truchas son aptas para la venta. Como son 6000 truchas entonces el 27,43% de 6000 trucas son 6000 · 0,2743 = 1645,8 truchas.

Se pondrán a la venta aproximadamente 1646 truchas.