	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2016-2017** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	uc3m Universidad Carlos III de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos, la 3ª y la 4ª sobre 2 puntos.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discute en función de los valores del parámetro real *a*.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=1$.
c) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta *r*, que pasa por los puntos P y Q, y la recta *s*, que pasa por R y S.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de *c(t)* e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.
b) (0,5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.
c) (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x)dx$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y $g(x)=sen(x)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$.

c) (1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A=PJP^{-1}$.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1\equiv x=y=z \quad y \quad r_2\equiv\begin{cases}x+y-1=0\\x-z+1=0\end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s\equiv x=2-y=z-1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discute en función de los valores del parámetro real *a*.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=1$.
c) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=2$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}=8a+4+a^2-8a-8=a^2-4.$$

Buscamos cuando se anula el determinante.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a=\sqrt{4}=\pm 2$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ *y* $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a=-2$

El determinante de A es 0 por lo que su rango no es 3.
¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-8+2=-6 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª → $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4-4=-8 \neq 0$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a=2$

El determinante de A es 0 por lo que su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8-2=-10 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es el mismo que A pues solo hemos añadido una columna, la 4ª que es igual que la 1ª.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a=1$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+4y=1 \\ x-4y+8y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ -2x-8y=-2 \end{cases}$$

$$-3y=-1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}} \Rightarrow x+\frac{4}{3}=1 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{z=\frac{4}{3}}$$

La solución es $\boxed{x=-\frac{1}{3}; \quad y=\frac{1}{3}; \quad z=\frac{4}{3}}$

c) Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ x-4y+3z=1 \\ 4y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ x-4y+3z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ x-4y+3z=1 \\ \boxed{z=2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+2y=2 \\ x-4y+6y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=2 \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Son la misma ecuación}\} \Rightarrow x+2y=1 \Rightarrow \boxed{x=1-2y}$$

Las soluciones son $\boxed{x=1-2t; \quad y=t; \quad z=2t}$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta *r*, que pasa por los puntos P y Q, y la recta *s*, que pasa por R y S.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

a) Si el plano contiene a los puntos P, Q y R tiene como vectores directores $\overrightarrow{PQ}=(-4,0,1)-(1,-2,1)=(-5,2,0)$ y $\overrightarrow{PR}=(-3,1,2)-(1,-2,1)=(-4,3,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-2,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-5,2,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PR}=(-4,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$2x-2-15z+15+8z-8+5y+10=0 \Rightarrow \boxed{\pi\equiv 2x+5y-7z+15=0}$$

b) Hallamos las ecuaciones de las rectas *r* y *s*.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-2,1)\in r \\ \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{PQ}=(-5,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv\left.\begin{array}{l} x=1-5\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} R(-3,1,2)\in s \\ \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{RS}=(0,-3,0)-(-3,1,2)=(3,-4,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow s\equiv\left.\begin{array}{l} x=-3+3\alpha \\ y=1-4\alpha \\ z=2-2\alpha \end{array}\right\}$$

Las coordenadas de los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales:

$$\frac{-5}{3}\neq\frac{2}{-4}\neq\frac{0}{-2}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.
¿Se cortan o se cruzan?
Hacemos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u_r}=(-5,2,0)$, $\overrightarrow{u_s}=(3,-4,-2)$ y $\overrightarrow{PR}=(-4,3,1)$.

$$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{PR}\right]=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=20+16-6-30=0$$

Como este producto mixto es nulo significa que las rectas se cortan, son coplanarias.

c) El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(-5,2,0) \\ \overrightarrow{PR}=(-4,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2i-15k+8k+5j=2i+5j-7k=(2,5,-7)$$

$$\text{Área triángulo } PQR=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\sqrt{4+25+49}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{78}}{2}=4,41\,u^2}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de *c(t)* e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$c(t)=te^{-t/2} \Rightarrow c'(t)=e^{-t/2}-\frac{t}{2}e^{-t/2}=e^{-t/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)$$

$$c'(t)=0 \Rightarrow e^{-t/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)=0 \Rightarrow 1-\frac{t}{2}=0 \Rightarrow 2-t=0 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

La segunda derivada es

$$c'(t)=e^{-t/2}-\frac{t}{2}e^{-t/2} \Rightarrow c''(t)=-\frac{1}{2}e^{-t/2}-\frac{1}{2}e^{-t/2}+\frac{t}{4}e^{-t/2}=-e^{-t/2}+\frac{t}{4}e^{-t/2}$$

$$c''(t)=e^{-t/2}\left(-1+\frac{t}{4}\right) \Rightarrow c''(2)=e^{-2/2}\left(-1+\frac{2}{4}\right)=-e^{-1}\frac{1}{2}<0$$

La concentración presenta un máximo en $t=2$, a las 2 horas la máxima concentración en sangre es de $c(2)=2e^{-2/2}=\frac{2}{e}=0,735\ mg/ml$.

La concentración siempre toma valores por debajo del máximo pues la función es continua y todos sus valores son inferiores a 0,735 mg/ml. No hay riesgo para el paciente en ningún momento.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x)dx$.

a) El dominio son todos los reales menos los valore de x que anulan el denominador.
Dominio = $\mathbb{R}-\{2\}$

Asíntota vertical. $x=a$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x-2}=\frac{12}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x+6}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)dx=\int\frac{x^2+x+6}{x-2}dx=$$

Realizamos la división.

$$\begin{array}{rrrl} x^2 & +x & +6 & \underline{|x-2} \\ \underline{-x^2} & \underline{+2x} & & x+3 \\ & 3x & +6 & \\ & \underline{-3x} & \underline{+6} & \\ & & 12 & \end{array}$$

$$\to \frac{x^2+x+6}{x-2}=x+3+\frac{12}{x-2}$$

$$=\int x+3+\frac{12}{x-2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+12\ln|x-2|+C$$

Lo aplicamos a la integral definida pedida:

$$\int_3^5 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+3x+12\ln|x-2|\right]_3^5=\left[\frac{5^2}{2}+15+12\ln|5-2|\right]-\left[\frac{3^2}{2}+9+12\ln|3-2|\right]=$$

$$=\frac{25}{2}+15+12\ln 3-\frac{9}{2}-9=\boxed{14+12\ln 3}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=\frac{2}{x}$ y $g(x)=sen(x)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2},4\right)$.

c) (1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.

a)

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{2}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{\operatorname{sen}(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2senx-2x}{x\operatorname{sen}(x)}\right)=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x-2}{senx+x\cos x}\right)=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2senx}{\cos x+\cos x-xsenx}\right)=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

b) $y=f(x)=\frac{2}{x}=2x^{-1}\rightarrow f´(x)=-2x^{-2}=-\frac{2}{x^2}$

$$\text{Para } x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{1}{2}\right)=4\\ f´\left(\frac{1}{2}\right)=-8\end{cases}\Rightarrow y-4=-8\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y-4=-8x+4\Rightarrow\boxed{y=-8x+8}$$

c) Hallamos los puntos de corte entre ambas gráficas.

$$\frac{2}{x}=-x+3\Rightarrow 2=-x^2+3x\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2=x\\ \frac{3-1}{2}=1=x\end{cases}$$

Vemos cuál de las dos funciones toma un valor superior entre 1 y 2.

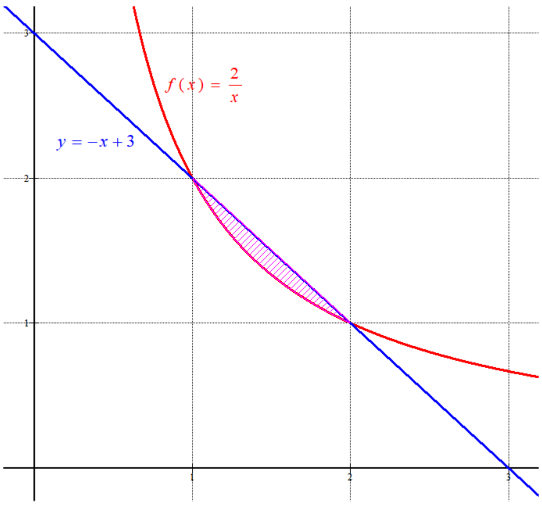
Entre 1 y 2 tomamos x = *1.5*, la función vale $f(1.5)=\frac{2}{1.5}=1.33$ y la recta vale y = –1.5 + 3 = 1.5. Es superior la recta.

$$Área=\int_1^2 -x+3-\frac{2}{x}dx=$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x\right]_1^2=$$

$$=\left[-\frac{2^2}{2}+6-2\ln 2\right]-\left[-\frac{1^2}{2}+3-2\ln 1\right]=$$

$$=-2+6-\ln 4+\frac{1}{2}-3=\boxed{\frac{3}{2}-\ln 4=0.113u^2}$$



Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.
b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A=PJP^{-1}$.

a) Veamos si existe la inversa de la matriz P.

$$|P|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=4+8+9-4-12-6=-1\neq 0$$

Existe y la calculamos con la fórmula:

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^t\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=-\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

b) Para calcular $B=P^{-1}J^{-1}$ necesitamos la inversa de la matriz J.

$$|J|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$$J^{-1}=\frac{Adj\left(J^t\right)}{|J|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=P^{-1}J^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1/2 & -2\\ -2 & 0 & -1\\ 5 & -1/2 & 4\end{pmatrix}$$

Pasamos a calcular la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} - 2 + 4 + 1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Existe la inversa de la matriz B.

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}{1/2} = 2\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Como $A = PJP^{-1}$ entonces $A^2 = AA = PJP^{-1}PJP^{-1} = PJJP^{-1}$.

Por propiedades de determinantes:

$$\left|A^2\right| = \left|PJJP^{-1}\right| = |P| \cdot |J| \cdot |J| \cdot \left|P^{-1}\right| = (-1)(-2)(-2)\frac{1}{|P|} = 4$$

Otra forma de hacerlo es calcular el producto de matrices y luego el determinante.

$$A^2 = PJJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 12 & 1 & -6 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 12 & 1 & -6 \\ 18 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -104 + 108 = 4$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2-y = z-1$ con el plano perpendicular a *s*, que pasa por el origen.

a) Veamos la posición relativa de las rectas.
Para ello planteo el sistema formado por sus ecuaciones y veo si tienen puntos en común.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv x = y = z \\ r_2 \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z+z-1=0 \\ z-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z-1=0 \\ 1=0 \end{cases}$$

Situación imposible, por lo que las rectas no tienen puntos en común. Pueden ser paralelas o se cruzan.
Hallemos los vectores directores de las rectas y un punto de cada una de ellas.

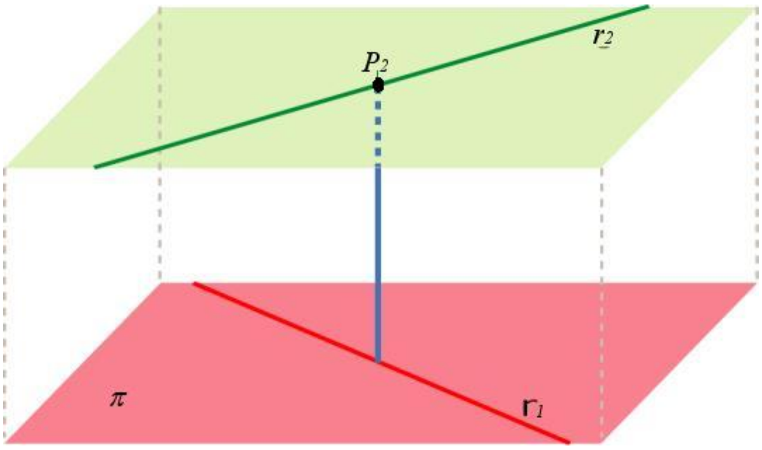
$$r_1 \equiv x = y = z \Rightarrow r_1 \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_1} = (1,1,1) \\ P_1(0,0,0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=1+x \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_2} = (1,-1,1) \\ P_2(0,1,1) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cruzan.



Se puede obtener la distancia con la fórmula del cociente entre el producto mixto y el módulo del producto vectorial, pero vamos a resolverlo determinando el plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2. Y a partir de ahí la distancia entre las rectas es la distancia del punto P_2 al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(0,0,0) \\ \vec{v_1} = (1,1,1) \\ \vec{v_2} = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y-z-z-y+x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2z=0 \Rightarrow \pi \equiv x-z=0$$

$$d(r_1,r_2)=d(P_2,\pi)=\frac{|-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}=0,707\,u}$$

b) La recta s tiene la expresión $s\equiv\frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$, por lo que tiene como vector director $\vec{v_s}=(1,-1,1)$

El plano perpendicular a $s\equiv x=2-y=z-1$ que pasa por O(0,0,0) tiene como vector normal el director de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0)\in\pi' \\ n'=\vec{v_s}=(1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} O(0,0,0)\in\pi' \\ x-y+z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow \pi'\equiv x-y+z=0$$

Resolvemos el sistema formado por ecuación de recta y plano para hallar el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{l} \pi'\equiv x-y+z=0 \\ s\equiv x=2-y=z-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x=2-y \\ 2-y=z-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x=2-y \\ 3-y=z\end{array}\right\}\Rightarrow 2-y-y+3-y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y=-5\Rightarrow\boxed{y=\frac{5}{3}}\Rightarrow\begin{cases} x=2-\frac{5}{3} \\ 3-\frac{5}{3}=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=\frac{1}{3}} \\ \boxed{z=\frac{4}{3}}\end{cases}$$

El punto de corte tiene coordenadas $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$

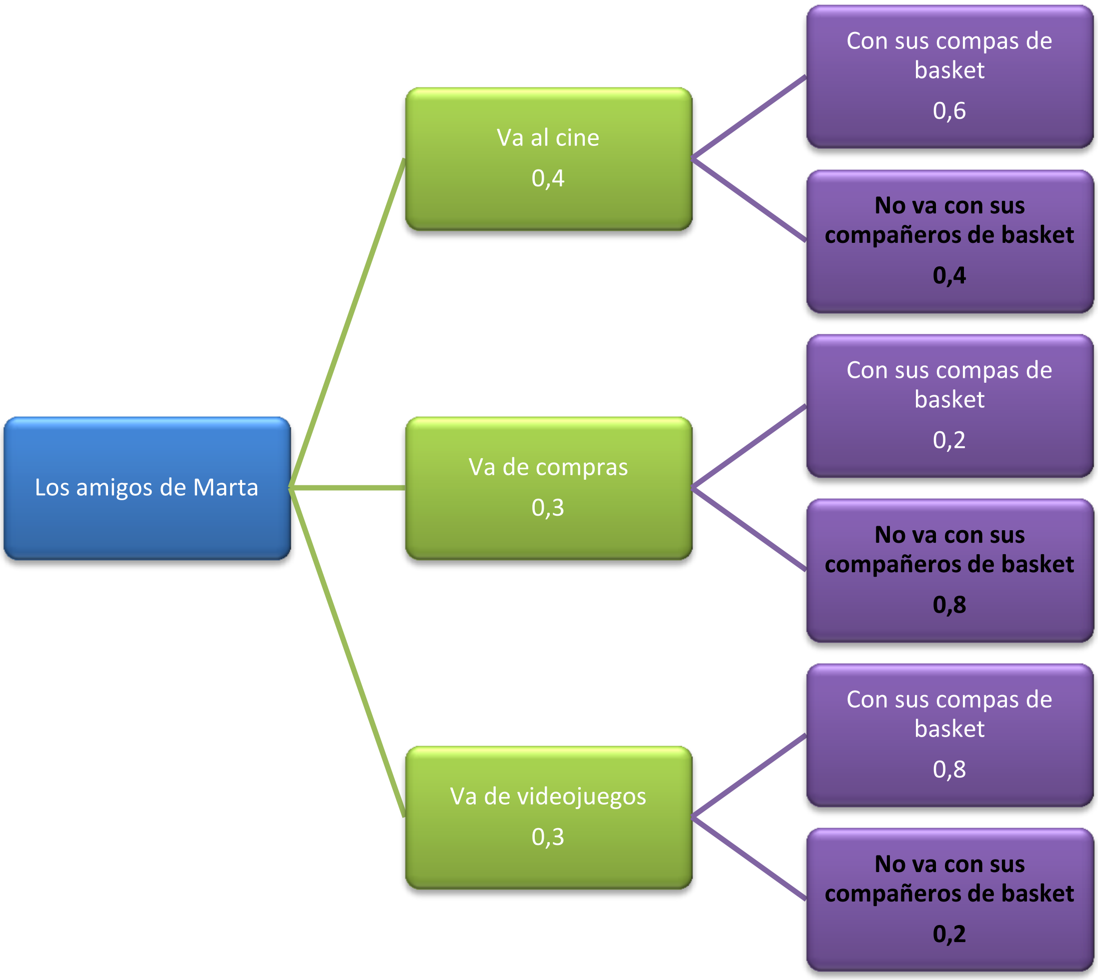
Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P\left(\text{Marta no quede con sus amigos}\right) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = \boxed{0,46}$

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\text{Vaya al cine/ Ha quedado con sus amigos de baloncesto}\right) =$$

$$= \frac{P\left(\text{Vaya al cine } \cap \text{ Ha quedado con sus amigos de baloncesto}\right)}{P\left(\text{Haya quedado con sus amigos de baloncesto}\right)} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,6}{1 - 0,46} = \frac{0,24}{0,54} = \boxed{\frac{4}{9} = 0,444}$$