UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2016-2017**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

uc3m Universidad Carlos III de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos, la 3ª y la 4ª sobre 2 puntos.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} xe^{2x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, donde *ln* significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 0*.
b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x-y-z=1, \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x-5y-2z=3, \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.
b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto P(1, 2, 3).

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando *x* gramos de A, *y* gramos de B y *z* gramos de C. Determínese las cantidades *x*, *y*, *z*.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A)=\frac{4}{9}$, $p(B)=\frac{1}{2}$ y $p(A\cup B)=\frac{2}{3}$, se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}/B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B=(A-I)(2I+2A)$.

b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A-I$, A^2-I y A^3-I .

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto Q(3,5,–3) a la recta *r*.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta *r* con el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto *Q*.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,3,–1), B(3,1 ,0) y C(2,5,1) y se pide:

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} xe^{2x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, donde *ln* significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 0*.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

a) Para que sea continua en *x = 0*, la función en dicho valor y sus límites laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{\ln(0+1)}{0+1}=0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} xe^{2x}=0e^0=0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^{2x}=0 \end{array}\right\}$$

Son todos los valores iguales y la función es continua en *x = 0*.

Para que sea derivable estudiamos sus derivadas laterales y vemos si coinciden.

$$f\,'(x)=\begin{cases} e^{2x}+2xe^{2x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{\dfrac{1}{x+1}(x+1)-1\cdot\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f\,'(x)=e^0+2\cdot 0\cdot e^0=1 \\ f\,'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f\,'(x)=\dfrac{1-\ln(0+1)}{(0+1)^2}=\dfrac{1}{1}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f\,'(0^-)=f\,'(0^+)=1\Rightarrow f\,'(0)=1$$

La función es derivable en *x = 0* y su derivada vale $f\,'(0)=1$.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-2x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2e^{-2x}}=\frac{1}{-\infty}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)dx = \int xe^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

La integral definida valdrá:

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{2}e^{0}\left(0 - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}e^{-2}\left(-1 - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2}}$$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x-y-z=1, \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x-5y-2z=3, \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto P(1, 2, 3).

a) Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} 6x-y-z=1, \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-y=1+z \\ 2x-y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-y=1+z \\ -2x+y=-1+z \end{cases}$$

$$4x \quad = 2z \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}z} \Rightarrow z-y=1-z \Rightarrow \boxed{-1+2z=y}$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{2}z \\ y=-1+2z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_1}=\left(\frac{1}{2},2,1\right) \\ P_1(0,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_1 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_1}=2\overrightarrow{v_1}=(1,4,2) \\ P_1(0,-1,0) \end{cases}}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} 3x-5y-2z=3, \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-5y=3+2z \\ 3x+y=3-4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-5y=3+2z \\ -3x-y=-3+4z \end{cases}$$

$$-6y=6z \Rightarrow \boxed{y=-z} \Rightarrow 3x-z=3-4z \Rightarrow 3x=3-3z \Rightarrow \boxed{x=1-z}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x=1-z \\ y=-z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_2 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_2}=(-1,-1,1) \\ P_2(1,0,0) \end{cases}}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1}=(1,4,2) \\ \overrightarrow{u_2}=(-1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.
Las rectas se cortan o cruzan.
Para averiguar cuál de estas dos situaciones cumplen r_1 y r_2 vamos a hacer el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u_1}=(1,4,2)$, $\overrightarrow{u_2}=(-1,-1,1)$ *y* $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,0)-(0,-1,0)=(1,1,0)$.

$$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{P_1P_2}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+4-2+2+0-1=3\neq 0$$

Por lo que las rectas se cruzan, están en distintos planos y no coinciden en ningún punto sin ser paralelas.

b) La distancia entre dos rectas que se cruzan es el volumen del paralelepípedo dividido entre el área de su base tomando como aristas del paralelepípedo los vectores directores de las rectas y un vector que una un punto de r_1 con un punto de r_2.

$$\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4i-2j-k+4k-j+2i=6i-3j+3k=(6,-3,3)$$

$$\text{Distancia}(r_1,r_2)=\frac{\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{P_1P_2}\right]}{\left|\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{3}{\sqrt{36+9+9}}=\frac{3}{\sqrt{54}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\,u}$$

c) El plano que contiene a r_1 y el punto P(1, 2, 3) es un plano con vectores directores $\overrightarrow{u_1}=(1,4,2)$ *y* $\overrightarrow{P_1P}=(1,2,3)-(0,-1,0)=(1,3,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,3)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{u_1}=(1,4,2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{P_1P}=(1,3,3) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$12x-12+2y-4+3z-9-4z+12-3y+6-6x+6=0$$

$$\boxed{\pi\equiv 6x-y-z-1=0}$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando *x* gramos de A, *y* gramos de B y *z* gramos de C. Determínese las cantidades *x*, *y*, *z*.

Construimos una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Otros metales
Gramos de A (x)	x	0	0
Gramos de B (y)	0.75y	0.15y	0.1y
Gramos de C (z)	0.6z	0.22z	0.18z
TOTALES	$x+0.75y+0.6z$	$0.15y+0.22z$	$0.1y+0.18z$

Como deseamos conseguir un lingote de 25 gramos con un 72% de oro, es decir, 25 · 0.72 = 18 gramos de oro.
El 16% de los 25 gramos del lingote de plata, es decir, 0.16 · 25 = 4 gramos de plata.
El resto del lingote, es decir, 25 – 18 – 4 = 3 gramos de “otros metales”.

Nos queda un sistema de tres ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+0.75y+0.6z=18 \\ 0.15y+0.22z=4 \\ 0.1y+0.18z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100x+75y+60z=1800 \\ 15y+22z=400 \\ 10y+18z=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x+15y+12z=360 \\ 15y+22z=400 \\ 5y+9z=150 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot\text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrcr} 15y & +27z & = & 450 \\ -15y & -22z & = & -400 \\ \hline & 5z & = & 50 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x+15y+12z=360 \\ 15y+22z=400 \\ 5z=50 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x+15y+12z=360 \\ 15y+22z=400 \\ \boxed{z=10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x+15y+120=360 \\ 15y+220=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x+15y=240 \\ 15y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} 20x+15y=240 \\ \boxed{y=\frac{180}{15}=12} \end{array}\right\} \Rightarrow 20x+180=240 \Rightarrow 20x=60 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A)=\frac{4}{9}$, $p(B)=\frac{1}{2}$ y $p(A\cup B)=\frac{2}{3}$, se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}/B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

a) Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B y comparamos su valor con el producto de las probabilidades de A y B.

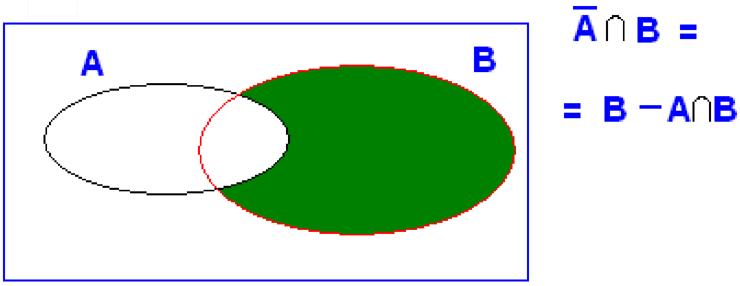
$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{9}+\frac{1}{2}-p(A\cap B)$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A\cap B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{8+9-12}{18}=\boxed{\frac{5}{18}} \\ p(A)\cdot p(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{4}{18}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son distintos y los sucesos no son independientes.}$$

b)

$$p(\overline{A}/B)=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}=\frac{p(B)-p(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{18}-\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{4}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{18}=\boxed{\frac{4}{9}}$$



OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B=(A-I)(2I+2A)$.

b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A-I,\quad A^2-I \ y \ A^3-I$.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

a)

$$B=(A-I)(2I+2A)$$

$$B=\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\left[2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-2+2&-2+2\\0&2-2&2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

b)

$$A-I=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=0\to Rango(A-I)<3$$

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0\to Rango(A-I)=2$$

$$A^2-I=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$Rango(A^2-I)=1$, pues la matriz sólo tiene un elemento no nulo.

$$A^3-I=A^2A-I=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}7&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=7-7=0\to Rango(A^3-I)<3$$

$$\begin{vmatrix}7&0\\0&-1\end{vmatrix}=-7\neq 0\to Rango(A^3-I)=2$$

c) Hemos calculado la expresión de A^3. Seguimos a partir de ahí.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^3A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left|A^6\right| = 64 \neq 0$; Existe la inversa de A^6.

$$\left(A^6\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(A^6\right)^T\right)}{\left|A^6\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{64} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(A^6\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

a) Calculamos los valores de la función y su derivada en $x=0$.

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{e^{-0}}{0^2+1}=1$$

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{-e^{-x}\left(x^2+1\right)-2xe^{-x}}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-e^{-x}\left(x^2+1+2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$x=0 \Rightarrow f\,'(0)=\frac{-e^{-0}\left(0^2+1+0\right)}{\left(0^2+1\right)^2}=-1$$

La recta tangente tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} y-f(a)=f\,'(a)(x-a) \\ a=0 \\ f(a)=1 \\ f\,'(a)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-1=-1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-x+1}$$

b) El dominio de la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula y la exponencial siempre existe.

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene, pues su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación}(L\acute{}H\hat{o}pital)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{2x}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\text{Indeterminación}(L\acute{}H\hat{o}pital)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2}=+\infty$$

Existe asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x\to+\infty$.

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

c)

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{-e^{-x}\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-e^{-x}\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=-1$$

Estudiemos el signo de la derivada antes y después de *x = –1*.

- En $\left(-\infty,-1\right)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale
  $f\,'(-2)=\frac{-e^{-(-2)}\left(\left(-2\right)^2+2\left(-2\right)+1\right)}{\left(\left(-2\right)^2+1\right)^2}=\frac{-e^2}{25}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-1\right)$.
- En $\left(-1,+\infty\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f\,'(0)=\frac{-e^{-0}\left(0^2+0+1\right)}{\left(0^2+1\right)^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(-1,+\infty\right)$.

La función decrece en todo su dominio.

No presenta extremos relativos.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$, se pide:

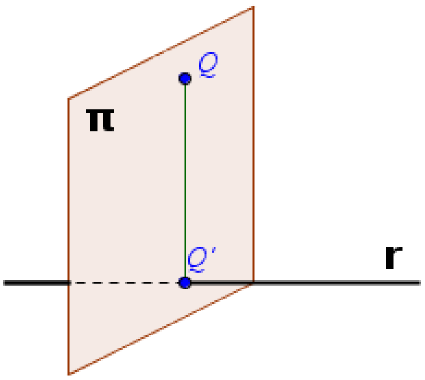
a) (1 punto) Hallar la distancia del punto Q(3,5,–3) a la recta r.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

a) Hallamos primero el vector director de la recta y su ecuación.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (7,0,2)-(3,2,0) = (4,-2,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1(3,2,0)\in r \\ \vec{v}=(4,-2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 3+4\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right.$$



Necesitamos hallar el plano π que contiene a Q y es perpendicular a la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} Q(3,5,-3)\in\pi \\ \vec{n}=\vec{v}=(4,-2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q(3,5,-3)\in\pi \\ \pi \equiv 4x-2y+2z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12-10-6+D=0 \Rightarrow D=4$$

$$\pi \equiv 4x-2y+2z+4=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-y+z+2=0$$

Necesito hallar el punto Q´ de corte de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x-y+z+2=0 \\ r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=3+4\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=2\lambda \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow 6+8\lambda-2+2\lambda+2\lambda+2=0 \Rightarrow 12\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-0.5$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3-2=1 \\ y=2+1=3 \\ z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Q´(1,3,-1)$$

Ya podemos determinar la distancia.

$$\overrightarrow{QQ´} = (1,3,-1)-(3,5,-3) = (-2,-2,2)$$

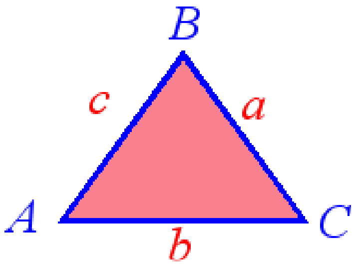
$$\boxed{\text{Distancia}(Q,r) = \text{Distancia}(Q,Q´) = \left|\overrightarrow{QQ´}\right| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}\ u}$$

b) Lo hemos determinado para hallar la distancia del punto Q a la recta r. Es $Q´(1,3,-1)$.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,3,–1), B(3,1 ,0) y C(2,5,1) y se pide:
a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

a) El tipo de triángulo lo deciden la longitud de sus lados y si son iguales o no.



Calculamos la longitud de cada lado.

$$\overrightarrow{BC}=(2,5,1)-(3,1,0)=(-1,4,1)\to a=\overline{BC}\ mide\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{AC}=(2,5,1)-(1,3,-1)=(1,2,2)\to b=\overline{AC}\ mide\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$$

$$\overrightarrow{AB}=(3,1,0)-(1,3,-1)=(2,-2,1)\to c=\overline{AB}\ mide\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+4+1}=3$$

Tiene dos lados iguales $b = c$ y el tercero desigual, por lo que es un triángulo isósceles.

b) Para calcular los ángulos utilizamos los vectores que definen cada lado.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(-1,4,1)\\ \overrightarrow{BA}=(-2,2,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-1,4,1)(-2,2,-1)=\sqrt{1+16+1}\sqrt{9}\cos(B)\Rightarrow 2+8-1=3\sqrt{18}\cos(B)$$

$$\cos(B)=\frac{9}{3\sqrt{18}}\Rightarrow \boxed{B=\frac{\pi}{4}=45^{\circ}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(1,2,2)\\ \overrightarrow{AB}=(2,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1,2,2)(2,-2,1)=\sqrt{9}\sqrt{9}\cos(A)\Rightarrow 2-4+2=9\cos(A)$$

$$\cos(A)=0\Rightarrow \boxed{A=\frac{\pi}{2}=90^{\circ}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA}=(-1,-2,-2)\\ \overrightarrow{CB}=(1,-4,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-1,-2,-2)(1,-4,-1)=\sqrt{9}\sqrt{18}\cos(C)\Rightarrow -1+8+2=3\sqrt{18}\cos(C)$$

$$\cos(C)=\frac{3}{\sqrt{18}}\Rightarrow \boxed{C=\frac{\pi}{4}=45^{\circ}}$$

Los ángulos son de 90º, 45º y 45º. Es un triángulo rectángulo isósceles (una escuadra).