COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2020	CONVOCATORIA: JULIO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real,

obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 *puntos*)
b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$. (3 *puntos*)
c) La solución del sistema cuando $a=0$. (2 *puntos*)

Problema 2. Sea la recta $r: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ y los puntos $P=(1,0,0)$ y $Q=(2,1,\alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 *puntos*)
b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha=1$. (3 *puntos*)
c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$. (4 *puntos*)

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 *puntos*)
c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0, x=2, x=4$. (3 *puntos*)

Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 *puntos*)
b) Los valores de b para que la matriz $A^{T}A$ tenga inversa, siendo A^{T} la matriz traspuesta de A. (3 *puntos*)
c) La inversa de $A^{T}A$, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x+y-z-5=0$ y los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,0)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. (4 *puntos*)
b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.
Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. (1+2 *puntos*)
c) La distancia entre el punto B y la recta r. (3 *puntos*)

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$. (4 *puntos*)
c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.
(2 *puntos*)

Soluciones:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real,

obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 *puntos*)

b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$. (3 *puntos*)

c) La solución del sistema cuando $a=0$. (2 *puntos*)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2 .$$

Igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow -a^3+3a-2=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow a=1 \text{ es raíz} \qquad -a^3+3a-2=(a-1)(-a^2-a+2)$$

$$-a^2-a+2=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-1)2}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{-2}=-2=a \\ \dfrac{1-3}{-2}=1=a \end{cases}$$

Tenemos tres situaciones distintas a estudiar.

CASO 1. $a\neq 1 \; y \; a\neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a=1$

El determinante de A es 0 y el rango de A no es 3

¿El rango de A es 2? ¿o 1?

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es 1 pues las 3 filas son iguales.

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Su rango no es 3 pues la fila 1ª y 2ª son iguales. Es 2 pues tomando el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y las columnas 1ª y 2ª → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$.

Rango de A = 1 ≠ 2 = Rango de A/B
El sistema es **incompatible**.

CASO 3. $a = -2$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.
¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ tiene determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Hemos añadido una columna 4ª que es igual que la 1ª, por lo que el rango de A/B es el mismo que el de A.
Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.
El sistema es **compatible indeterminado**.

b) Cuando $a = -2$ estamos en el caso 3 y tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & -2y & +z & = 1 \\ -x & -y & +2z & = -1 \\ \hline & -3y & +3z & = 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} -2x & +y & +z & = -2 \\ 2x & +2y & -4z & = +2 \\ \hline & 3y & -3z & = 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{Quito ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ \boxed{y = z} \end{cases} \Rightarrow x + z - 2z = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + z}$$

La solución es $\boxed{x = 1 + t; \quad y = t; \quad z = t}$

c) Cuando $a = 0$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución. La hallamos utilizando el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-2-1-1}{-2}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1-1+2}{-2}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1+2-1}{-2}=-1$$

La solución es $\boxed{x=2;\quad y=-1;\quad z=-1}$

Problema 2. Sea la recta $r:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ y los puntos $P=(1,0,0)$ y $Q=(2,1,\alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 *puntos*)

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha=1$. (3 *puntos*)

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$. (4 *puntos*)

a) La recta que pasa por P y Q tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}=(2,1,\alpha)-(1,0,0)=(1,1,\alpha)$. El vector director de la recta *r* es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)$.
Para que sean paralelas deben tener vectores directores con coordenadas proporcionales $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{PQ}=(1,1,\alpha)$, por lo que $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{-1}{\alpha}\Rightarrow\boxed{\alpha=-1}$.

b) El plano que contiene a P y Q tiene como uno de sus vectores directores $\overrightarrow{PQ}=(2,1,\alpha)-(1,0,0)=(1,1,\alpha)=(1,1,1)$. Como es paralelo a la recta *r* el otro vector director del plano es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(1,0,0)\in\pi\\ \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$x-1-y+z-z-y+x-1=0$$

$$2x-2y-2=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv x-y-1=0}$$

c) El plano π´ que es perpendicular a *r* tiene como vector normal el director de *r* $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)$.
Hallamos la ecuación de este plano.

$$\left.\begin{array}{l}P(1,0,0)\in\pi'\\ \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1,0,0)\in\pi'\\ \pi'\equiv x+y-z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow 1+0-0+D=0\Rightarrow D=-1$$

$$\pi'\equiv x+y-z-1=0$$

Aplicamos la fórmula de la distancia de punto a plano.

$$\left.\begin{array}{l}Q(2,1,1)\\ \pi'\equiv x+y-z-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\text{distancia}(\text{Q},\pi')=\frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577\ u}$$

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 *puntos*)

c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$. (3 *puntos*)

a) El dominio de una función racional son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

El dominio de la función *f* es $\mathbb{R}-\{0,1\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{0}=\infty \text{ Si es asíntota.}$$

¿ $x=1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{2}{0}=\infty \text{ Si es asíntota.}$$

$x=0$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene pues hay una horizontal.

b) $\int f(x)dx=\int\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=$

Descomponemos en fracciones simples la fracción del integrando.

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x^2+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

$$x=0\to 1=B(-1)\to B=-1$$

$$x=1\to 2=C$$

$$x=-1\to 2=2A-2B+C\to 2=2A+2+2\to 2A=-2\Rightarrow A=-1$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$$

$$= \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} dx = -\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + 2\int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| = \boxed{-\ln|x| + \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x} + K}$$

Si la primitiva debe pasar por el punto (2, 0) se cumple:

$$-\ln 2 + \ln(2-1)^2 + \frac{1}{2} + K = 0 \Rightarrow K = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

La primitiva buscada es $\boxed{F(x) = -\ln x + \ln(x-1)^2 - \frac{1}{x} + \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln \frac{2(x-1)^2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$

c) La función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ no corta el eje de abscisas.

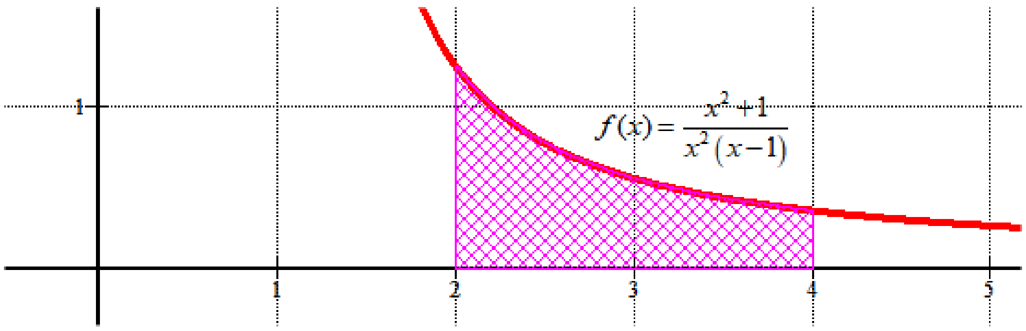
$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = 0 \Rightarrow x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \textit{No existe}$$

El área pedida es la integral definida de la función entre 2 y 4.

$$\acute{A}rea = \int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} dx = \left[-\ln|x| + \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x} \right]_2^4 =$$

$$= \left[-\ln 4 + \ln(4-1)^2 + \frac{1}{4} \right] - \left[-\ln 2 + \ln(2-1)^2 + \frac{1}{2} \right] =$$

$$= -\ln 4 + \ln 9 + \frac{1}{4} + \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} = \ln \frac{18}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\ln \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = 1.254\, u^2}$$



Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 *puntos*)

b) Los valores de b para que la matriz $A^{\mathrm{T}}A$ tenga inversa, siendo A^{T} la matriz traspuesta de A. (3 *puntos*)

c) La inversa de $A^{\mathrm{T}}A$, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

a) Calculemos la expresión de ambas matrices:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & 0+2b & 2-2\\ -b+0 & 0+0 & 2b-0\\ 1-2 & 0+2b & -2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2b & 0\\ -b & 0 & 2b\\ -1 & 2b & -4\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0-2 & -2+0+4\\ -1+b^2+1 & -2+0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ b^2 & -4\end{pmatrix}$$

Para que AB tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|AB|=\begin{vmatrix}-3 & 2b & 0\\ -b & 0 & 2b\\ -1 & 2b & -4\end{vmatrix}=-4b^2-8b^2+12b^2=0$$

No existe la inversa de AB, independientemente del valor de b.

Para que BA tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|BA|=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ b^2 & -4\end{vmatrix}=12-2b^2$$

$$12-2b^2=0\Rightarrow 6-b^2=0\Rightarrow 6=b^2\Rightarrow b=\pm\sqrt{6}$$

Para cualquier valor de b distinto $\pm\sqrt{6}$ existe la inversa de BA.

b) Calculamos la expresión de $A^{\mathrm{T}}A$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^TA=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+b^2+1 & 2+0-2\\ 2+0-2 & 4+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^2+2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

Averiguamos si su determinante se puede anular.

$$|A^TA|=\begin{vmatrix}b^2+2 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}=8\left(b^2+2\right)$$

$$|A^TA|=0\Rightarrow 8\left(b^2+2\right)=0\Rightarrow b^2+2=0\Rightarrow b=\sqrt{-2}=\text{No existe}$$

El determinante de A^TA nunca se anula. La inversa de A^TA existe siempre.

c) La inversa existe para cualquier valor de b. La calculamos.

$$A^TA=\begin{pmatrix}b^2+2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^TA\right)^T=\begin{pmatrix}b^2+2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$\left(A^TA\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^TA\right)^T\right)}{|A^TA|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}b^2+2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}}{8\left(b^2+2\right)}=\frac{\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & b^2+2\end{pmatrix}}{8\left(b^2+2\right)}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b^2+2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{8}\end{pmatrix}$$

Problema 5. Se dan el plano $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,0)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. (4 *puntos*)
b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.
Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. (1+2 *puntos*)
c) La distancia entre el punto B y la recta r. (3 *puntos*)

a) Si el plano pasa por A y por B tiene como uno de sus vectores directores el vector $\overrightarrow{AB} = (2,1,0) - (1,2,-1) = (1,-1,1)$ y al ser perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$ otro de sus vectores directores es el normal del plano π, $\vec{n} = (2,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} B(2,1,0) \in \pi' \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,-1,1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 2 + 2y - 2 + z + 2z + y - 1 - x + 2 = 0$$

$$3y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv y + z - 1 = 0}$$

b) Si la recta es perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$ tiene como vector director el normal del plano → $\vec{v_r} = \vec{n} = (2,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,2,-1) \in r \\ \vec{v_r} = \vec{n} = (2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \left.\begin{array}{r} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array}\right\}}$$

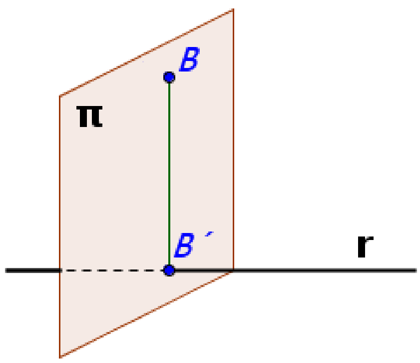
Si ponemos la ecuación de la recta en forma continua:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

Separamos esta ecuación en dos igualdades que nos proporcionan la ecuación de dos planos que se cortan en esta recta. Evidentemente hay muchos pares de planos cuya intersección es la misma recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \\ \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2y - 4 \\ -y + 2 = z + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -y - z + 1 = 0 \end{cases}}$$

c) Seguimos el procedimiento descrito en el dibujo.
Como tenemos la ecuación del plano $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$ y de la recta $r \equiv \left.\begin{array}{r} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array}\right\}$ hallamos el punto de corte de ambos (B') y la distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{BB'}$



$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x+y-z-5=0 \\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda)+2+\lambda+1+\lambda-5=0 \Rightarrow 6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$$

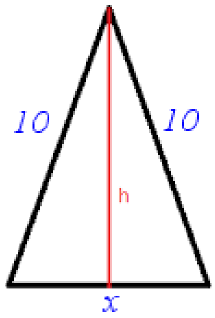
$$\left.\begin{array}{l}\lambda=0 \\ \left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow B'(1,2,-1)$$

$$\overrightarrow{BB'}=(1,2,-1)-(2,1,0)=(-1,1,-1)$$

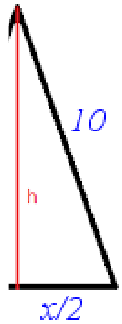
$$d(B,r)=d(B,B')=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\boxed{\sqrt{3}\,u}$$

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \le x \le 20$. (4 *puntos*)
c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 *puntos*)

a) La situación planteada es la del dibujo.



Considerando el triángulo rectángulo del dibujo:



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$10^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 100 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = 100 - \frac{x^2}{4} = \frac{400-x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{400-x^2}{4}}$$

Así el área del triángulo es:

$$\acute{A}rea(x) = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{400-x^2}{4}}}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{400-x^2}}{2}}{2} = \frac{x\sqrt{400-x^2}}{4}$$

b) Si los dos lados miden 10 cm el lado desigual debe medir entre 0 y 20 cm.
Derivamos la función área.

$$A(x) = \frac{x\sqrt{400-x^2}}{4} = \frac{1}{4}x\sqrt{400-x^2} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{4}\left[\sqrt{400-x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{400-x^2}}\right]$$

$$A'(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{\left(\sqrt{400-x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{400-x^2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\left(400-x^2\right)-x^2}{\sqrt{400-x^2}}\right] = \frac{400-2x^2}{4\sqrt{400-x^2}} = \frac{200-x^2}{2\sqrt{400-x^2}}$$

Igualamos a cero.

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{200-x^2}{2\sqrt{400-x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{200} = 14{,}14\ldots\, cm$$

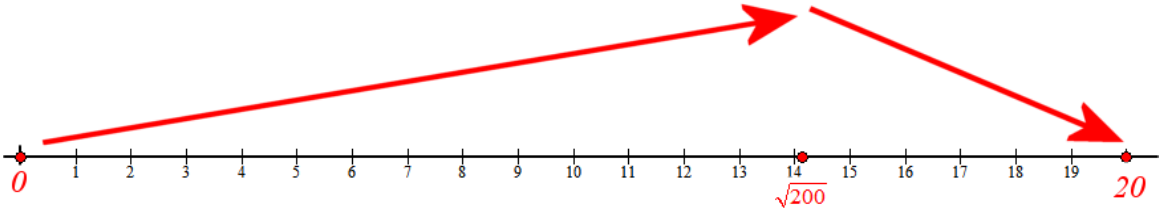
Estudiamos el cambio de signo en el intervalo [0, 20] de la derivada antes y después de $x = \sqrt{200}$.

- En $\left(0,\sqrt{200}\right)$ tomamos x = 10 y la derivada vale

$$A'(x)=\frac{200-10^2}{2\sqrt{400-10^2}}=\frac{100}{2\sqrt{300}}>0$$. La función crece en $\left(0,\sqrt{200}\right)$.

- En $\left(\sqrt{200},20\right)$ tomamos x =15 y la derivada vale

$$A'(x)=\frac{200-15^2}{2\sqrt{400-15^2}}=\frac{-25}{2\sqrt{175}}<0$$. La función decrece en $\left(\sqrt{200},20\right)$.



c) Por el gráfico anterior se deduce que en $x=\sqrt{200}$ hay un máximo relativo del área del triángulo.
Como el área para *x = 0* es 0 y para *x = 20* también es 0 el máximo relativo lo será absoluto.
Dicho valor máximo es:

$$Área\left(\sqrt{200}\right)=\frac{\sqrt{200}\sqrt{400-\left(\sqrt{200}\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{200}\sqrt{400-200}}{4}=\frac{200}{4}=\boxed{50\ cm^2}$$