| | | | |
|---|---|---|---|
| | Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León** | **MATEMÁTICAS II** | **EJERCICIO** **Nº Páginas: 3** |

**El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.**

**2.- CALCULADORA:** Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

**CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

---

**E1.- (Álgebra)**

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $\lambda$:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

**a)** Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

**E2.- (Álgebra)**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

**a)** Encontrar los valores de *m* y *n* para que se verifique:

$A^2 = A^t$ ($A^t \equiv$ *la traspuesta de* $A$) **(1,2 puntos)**

**b)** ¿Para qué valores de *m* y *n* la matriz A no es invertible? **(0,8 puntos)**

**E3.- (Geometría)**

Dado el punto $P = (2,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-4}{-3}$,

**a)** Hallar la recta paralela a *r* que pase por *P* **(0,8 puntos)**

**b)** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto *P* y contiene a la recta *r*. **(1,2 puntos)**

**E4.- (Geometría)**

**a)** Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$ **(1 punto)**

**b)** Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. **(1 punto)**

**E5.- (Análisis)**

Determinar la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en *x = 1* y que la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

**E6.- (Análisis)**

Demuestre que la ecuación $x^4+3x=1+senx$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

**E7.- (Análisis)**

**a)** Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$ . **(1 punto)**

**b)** Dada la función $f(x)=\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$ , hallar la función primitiva suya *F(x)* que verifique *F(0) = 3*.

**(1 punto)**

**E8.- (Análisis)**

**a**) Dada la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

**b**) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

**(1 punto)**

**E9- (Probabilidad y estadística)**

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

**a)** ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año?

**(1 punto)**

**b)** ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

**E10.- (Probabilidad y estadística)**

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

**a)** Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

**b)** Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

# SOLUCIONES

**E1.- (Álgebra)**

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $\lambda$:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

**a)** La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - 1 - \lambda = \lambda^2 - \lambda$. Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Estudiamos 3 situaciones distintas.

**CASO 1**. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

**El sistema es compatible determinado**.

**CASO 2**. $\lambda = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1} \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + 1 + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡}IMPOSIBLE\text{!}$$

Resolviendo el sistema se llega a una situación imposible pues una expresión ($x + y$) no puede dar dos valores diferentes (1 y 2).

**El sistema es incompatible**.

**CASO 3**. $\lambda = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{Quito ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 - y} \\ x + z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - y + z = 2 - y \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

**El sistema es compatible indeterminado**.

Tiene infinitas soluciones: $x = 1 - t;\ y = t;\ z = 1 \quad con\ t \in \mathbb{R}$

b) Para $\lambda = 1$ las soluciones son $x = 1 - t;\ y = t;\ z = 1 \quad con\ t \in \mathbb{R}$. Resuelto en apartado a) CASO 3.

**E2.- (Álgebra)**

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

**a)** Encontrar los valores de *m* y *n* para que se verifique:

$A^2 = A^t$ $\quad$ ( $A^t \equiv la\ traspuesta\ de\ A$) **(1,2 puntos)**

**b)** ¿Para qué valores de *m* y *n* la matriz A no es invertible? **(0,8 puntos)**

**a)**

$$\left.\begin{array}{r} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+nm & n^2 \end{pmatrix} \\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \\ A^2 = A^t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+nm & n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1=1 \\ m=0 \\ 0=m+nm \\ n=n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{m=0} \\ 0=m+nm \\ n=n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0=0+0 \\ n=n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow n=n^2 \Rightarrow n^2-n=0 \Rightarrow n(n-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=0} \\ o \\ \boxed{n=1} \end{cases}$$

Los valores son: $m=n=0 \quad o \quad m=0\ y\ n=1$

**b)** Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para averiguar esos valores para los que la matriz A no es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n$$

$$|A| = 0 \Rightarrow n = 0$$

Para $n=0$ y cualquier valor de *m* la matriz no es invertible.

**E3.- (Geometría)**

Dado el punto $P=(2,1,1)$ y la recta $r\equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}$,

**a)** Hallar la recta paralela a *r* que pase por *P* **(0,8 puntos)**

**b)** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto *P* y contiene a la recta *r*. **(1,2 puntos)**

a) Si la recta *s* es paralela a la recta *r* tiene el mismo vector director.

$$\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,-3)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por $P=(2,1,1)$:

$$\left.\begin{array}{l} P=(2,1,1)\in s \\ \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,-3) \end{array}\right\}\Rightarrow s\equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$$

b) Si el plano π contiene al punto P y a la recta *r* entonces debe tener como vectores directores el director de la recta $\overrightarrow{v_r}$ y también el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto cualquiera de la recta *r*.

$$r\equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}\Rightarrow Q=(2,3,4)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2,3,4)-(2,1,1)=(0,2,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P=(2,1,1)\in \pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0,2,3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,-3) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$-6x+12+3y-3-2z+2+3x-6=0$$

$$\boxed{\pi\equiv -3x+3y-2z+5=0}$$

**E4.- (Geometría)**

**a)** Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$ **(1 punto)**

**b)** Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$. **(1 punto)**

a) Hallamos el vector director de la recta *r* mediante el producto escalar de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v_r} = \vec{n} \times \vec{n'} = (1,-1,-1)\times(1,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + k + k - j + i = -2j + 2k = (0,-2,2)$$

La recta s paralela a r que pasa por (1, 2, 3) tiene ecuación:

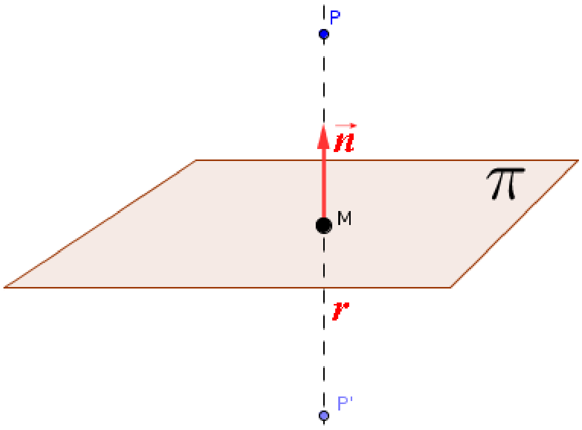
$$\left.\begin{array}{l} (1,\ 2,\ 3)\in s \\ \vec{v_s} = (0,-2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}}$$

b) Hallamos la ecuación de la recta *t* perpendicular al plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$ que pasa por el punto P(1, 2, 3).

$$\left.\begin{array}{l} (1,2,3)\in t \\ \vec{v_t} = \vec{n} = (3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = 2+2\alpha \\ z = 3+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta *t* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = 2+2\alpha \\ z = 3+\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$




$$\Rightarrow 3(1+3\alpha)+2(2+2\alpha)+3+\alpha+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+9\alpha+4+4\alpha+3+\alpha+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\alpha+14=0 \Rightarrow 14\alpha=-14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-3=-2 \\ y = 2-2=0 \\ z = 3-1=2 \end{cases} \Rightarrow M(-2,0,2)$$

El punto simétrico $P'(a,b,c)$ es un punto tal que el vector $\overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{MP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P'M} = (-2,0,2)-(a,b,c) = (-2-a,-b,2-c) \\ \overrightarrow{MP} = (1,2,3)-(-2,0,2) = (3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow (-2-a,-b,2-c) = (3,2,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2-a=3 \to a=-5 \\ -b=2 \to b=-2 \\ 2-c=1 \to c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-5,-2,1) \text{ Simétrico de P respecto del plano } \pi}$$

**E5.- (Análisis)**
Determinar la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en *x = 1* y que la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a \Rightarrow f'''(x)=6$$

Al tener un punto de inflexión en *x = 1* significa que se anula la derivada segunda y la tercera es no nula.

$$\left.\begin{array}{l} f''(1)=6+2a=0 \\ f'''(1)=6\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=-3}$$

La función tiene la expresión $f(x)=x^3-3x^2+bx+c$ y la derivada es $f'(x)=3x^2-6x+b$

Falta determinar el valor de "*b*" y "*c*".

Si la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas ( $y=0$ ) significa que $f(-1)=0$ y que $f'(-1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+b(-1)+c \Rightarrow -1-3-b+c=0 \Rightarrow c-b=4 \\ f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)+b=0 \Rightarrow 3+6+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-9} \end{array}\right\} \Rightarrow c+9=4 \Rightarrow \boxed{c=-5}$$

Las constantes son $a=-3;\quad b=-9;\quad c=-5$ y la función es $\boxed{f(x)=x^3-3x^2-9x-5}$

**E6.- (Análisis)**
Demuestre que la ecuación $x^4+3x=1+senx$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

A partir de la ecuación planteada consideramos la función $f(x)=x^4+3x-1-senx$.
En $x=0$ la función vale $f(0)=0^4+0-1-sen0=-1<0$.
En $x=2$ la función vale $f(2)=2^4+6-1-sen2=21-sen2>0$.

La función $f(x)=x^4+3x-1-senx$ es continua en $[0,2]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, por el teorema de Bolzano existe $c\in[0,2]$ tal que $f(\mathrm{c})=0$.
Esto implica que existe $c\in[0,2]$ tal que $f(\mathrm{c})=c^4+3c-1-senc=0\Rightarrow c^4+3c=1+senc$

Además esta solución es única, ya que si hubiese otro valor $d\in[0,2]$ tal que $f(d)=0$.
Podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^4+3x-1-senx$ en el intervalo $[c,d]$, pues la función es derivable en $(\mathrm{c},\mathrm{d})$, continua en $[\mathrm{c},\mathrm{d}]$.
El teorema de Rolle nos asegura la existencia de un valor $e\in(c,d)$ tal que $f\,'(e)=0$.
Pero la derivada de la función es $f\,'(x)=4x^3+3-\cos x$, si la igualamos a cero obtenemos:

$$f\,'(x)=0\Rightarrow 4x^3+3-\cos x=0\Rightarrow 4x^3=-3+\cos x.$$

Esta igualdad es imposible para $x\in(0,2)$ pues $\left.\begin{array}{r} 4x^3>0 \\ \cos x\le 1\Rightarrow -3+\cos x<0 \end{array}\right\}$

La contradicción obtenida permite afirmar que la solución de la ecuación inicial es única.

**E7.- (Análisis)**

**a)** Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$ . **(1 punto)**

**b)** Dada la función $f(x)=\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$ , hallar la función primitiva suya *F(x)* que verifique *F(0) = 3*.

**(1 punto)**

**a)**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x+1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{-1}{2}+\frac{2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

**b)** Como la derivada de $x^2+e^{-x}$ **es** $2x-e^{-x}$**:**

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}dx=\ln\left(x^2+e^{-x}\right)+K$$

Como debe cumplirse que *F(0) = 3* entonces $\ln\left|0^2+e^{-0}\right|+K=3\Rightarrow K=3$**.**

$$\boxed{F(x)=\ln\left(x^2+e^{-x}\right)+3}$$

**E8.- (Análisis)**

**a**) Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

**b**) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas *x = 1* y *x = 3*. **(1 punto)**

**a)** El dominio de la función es $(0,+\infty)$, pues no existe el logaritmo de un número negativo.

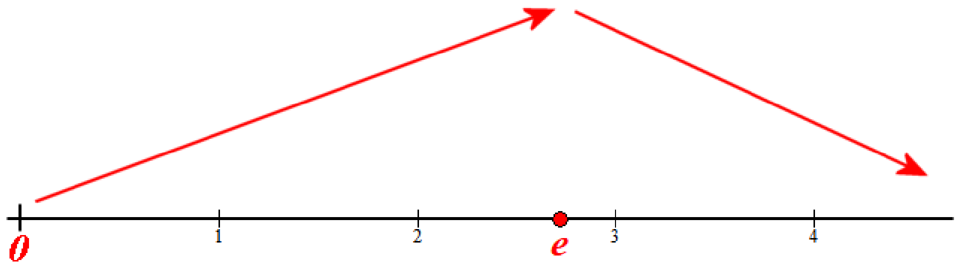
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow\ln x=1\Rightarrow x=e$$

Estudiamos el comportamiento de la función antes y después de *x* = *e*.

- En $(0,e)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{1-\ln 1}{1^2}=1>0$. La función crece en $(0,e)$.
- En $(e,+\infty)$ tomamos $x=e^2$ y la derivada vale $f'(e^2)=\dfrac{1-\ln e^2}{e^4}=\dfrac{-1}{e^4}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.




La función crece en $(0,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo en *x* = *e*.

Como $f(\mathrm{e})=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$ el punto $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo de la función.

b) Vemos donde se anula la función.

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

*x* = *2* pertenece al intervalo $[1,3]$ por lo que se divide en dos partes, vemos el signo de la función en cada una de ellas.

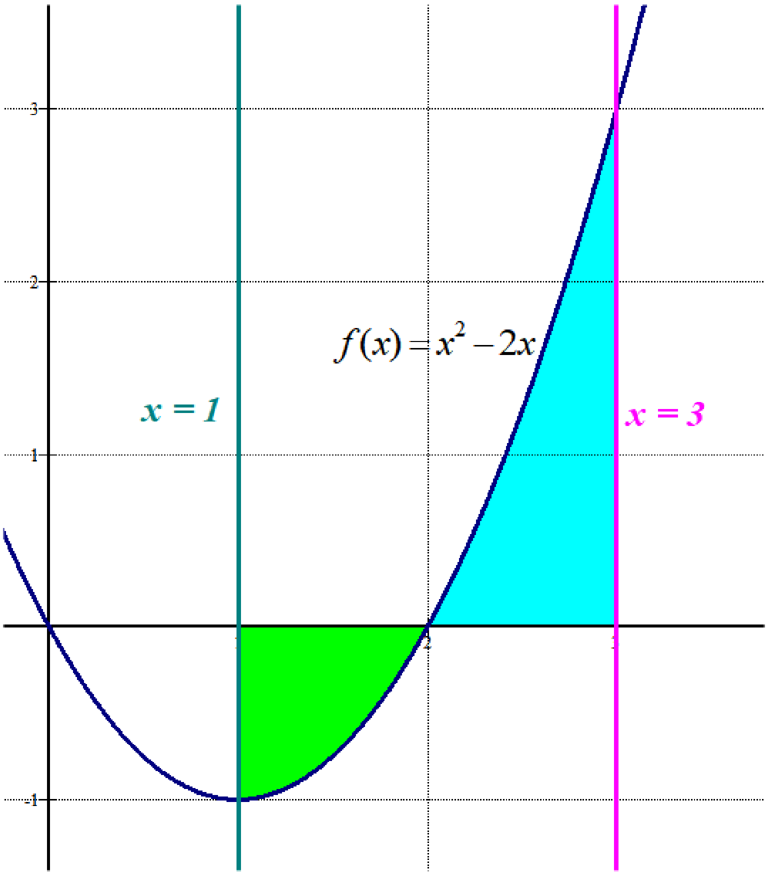
- En $[1,2)$ tomamos *x* = *1,5* y la función vale $f(1,5)=1,5^2-3=-0,75<0$. Es negativa en el intervalo $[1,2)$.
- En $(2,3]$ tomamos *x* = *2,5* y la función vale $f(2,5)=2,5^2-5=1,25>0$. Es positiva en el intervalo $(2,3]$.

El área del recinto es la suma de las integrales definidas siguientes:

$$Área=\int_1^2 -\left(x^2-2x\right)dx+\int_2^3 x^2-2xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=$$

$$=\left[-\frac{2^3}{3}+2^2\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+1^2\right]+\left[\frac{3^3}{3}-3^2\right]-\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right]=$$

$$=-\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}-1+9-9-\frac{8}{3}+4=-\frac{15}{3}+7=\boxed{2\,u^2}$$



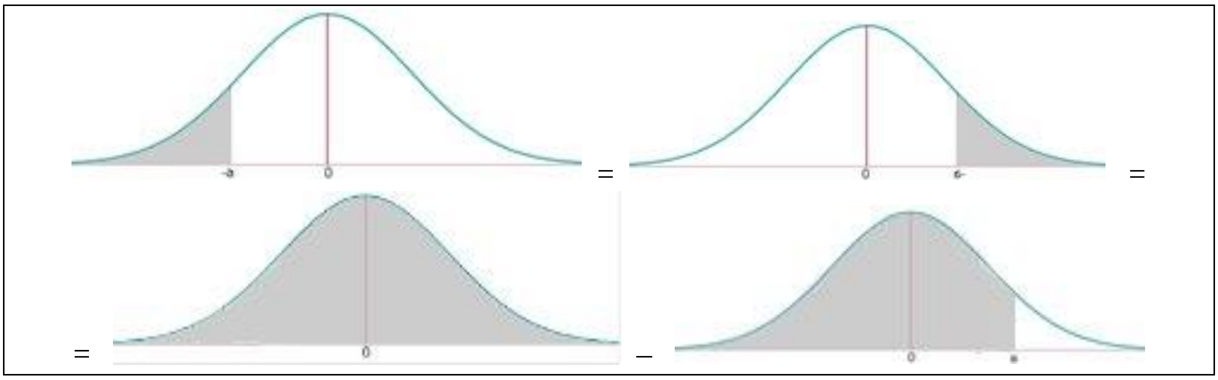

*Si contamos cuadraditos en el dibujo (cada cuadradito es 1 unidad cuadrada) vemos que es coherente con el resultado obtenido (aproximadamente 2 cuadraditos)*

**E9- (Probabilidad y estadística)**
El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.
**a)** ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**
**b)** ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

X = Consumo de azúcar (kg/año) en un país. X = N(15, 5).

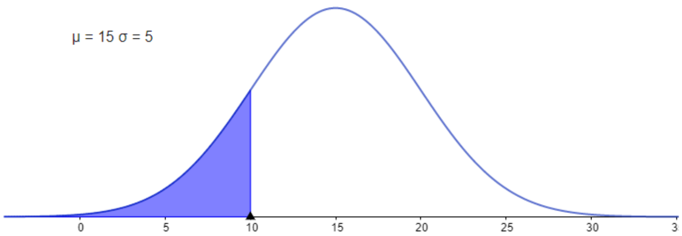
a)

$$P(X \le 10) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{10-15}{5}\right) = P(Z \le -1) = \ldots$$



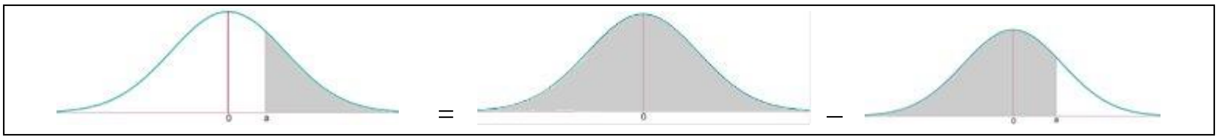
$$\ldots = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0{,}8413 = \boxed{0{,}1587}$$

Un porcentaje del 15,87% de personas consumen menos de 10 kg de azúcar al año.



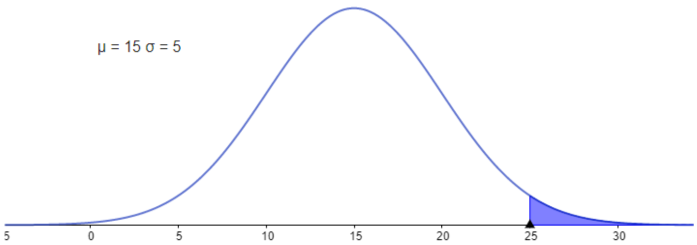

b)

$$P(X \ge 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \ge \frac{25-15}{5}\right) = P(Z \ge 2) = \ldots$$



$$\ldots = 1 - P(Z \le 2) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0{,}9772 = \boxed{0{,}0228}$$

Un porcentaje de 2,28% de personas consumen más de 25 kg de azúcar al año.

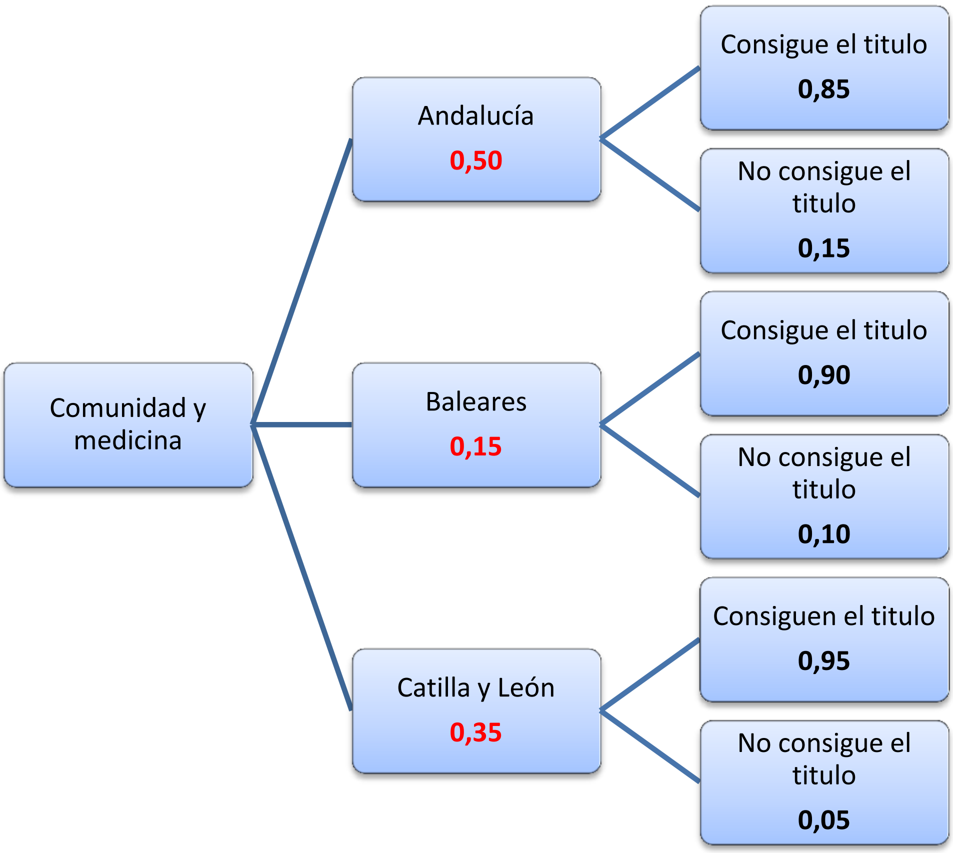


**E10.- (Probabilidad y estadística)**
Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

**a)** Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

**b)** Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.




a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y sumamos las probabilidades de las tres ramas donde "no se consigue el título de médico".

$$P(\text{No consigue el titulo}) = P(\text{Es de Andalucía})P(\text{No consigue el titulo/Es de Andalucía}) +$$
$$+P(\text{Es de Baleares})P(\text{No consigue el titulo/Es de Baleares}) +$$
$$+P(\text{Es de Castilla y León})P(\text{No consigue el titulo/Es de Castilla y León}) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,10 + 0,35 \cdot 0,05 = 0,0750 + 0,0150 + 0,0175 = \boxed{0,1075}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular las probabilidades de que sea de Andalucía o de Castilla y León.

$$P(\text{Sea de Andalucía / No ha conseguido el titulo}) =$$
$$= \frac{P(\text{Sea de Andalucía } \cap \text{ No ha conseguido el titulo})}{P(\text{No ha conseguido el titulo})} = \frac{0,50 \cdot 0,15}{0,1075} = \frac{30}{43} = 0,6976$$

$$P\left(\text{Sea de Castilla y León / No ha conseguido el titulo}\right) =$$
$$= \frac{P\left(\text{Sea de Castilla y León } \cap \text{ No ha conseguido el titulo}\right)}{P\left(\text{No ha conseguido el titulo}\right)} =$$
$$= \frac{0,35 \cdot 0,05}{0,1075} = \frac{7}{43} = 0,1627$$

Comparando las probabilidades de que sea de Andalucía (30/43) y la de que sea de Castilla y León (7/43) concluimos que es más probable que sea de la comunidad autónoma andaluza.