



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2018**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $AB = C$ y calcule todas sus soluciones.
- 2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0, y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de $f(x)$.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 3$ y $x = 4$.

Ejercicio 3

Tomemos la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x - y = 2$.

- 1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.
- 2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .
- 3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π .
- 4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- 1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro b .
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$.

Ejercicio 2

Se quiere construir un cilindro de volumen $250 \cdot \pi$ metros cúbicos y área mínima.

- 1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura h del cilindro en función del radio r de la base.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función $a(r)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.
- 3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, área del cilindro: $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Ejercicio 3

Sean r y s las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$s : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de r y s .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre r y s .
- 3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $AB = C$ y calcule todas sus soluciones.

2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0, y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

1)

$$AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2z-2+x \\ 2+y-z \\ 2(x+z)+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z-2+x = -2 \\ 2+y-z = 3 \\ 2(x+z)+y+z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2z = 0 \\ y-z = 3-2 \\ 2x+2z+y+z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2z = 0 \\ y-z = 1 \\ 2x+y+3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2z \\ y-z = 1 \\ 2x+y+3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y-z = 1 \\ -4z+y+3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y-z = 1 \\ y-z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1+z}$$

Las soluciones del sistema que surge de la ecuación matricial son

$$x = -2t; \quad y = 1+t; \quad z = t \quad \text{siendo } t \in \mathbb{R}.$$

2) Si $x = 0, y = 0$ la matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{vmatrix} = -2z^2 - 2z$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2z^2 - 2z = 0 \Rightarrow -2z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

- Si $z \neq 0$ y $z \neq -1$ entonces el determinante de A no se anula y su rango es 3.

Veamos que ocurre si z toma el valor 0 o -1 .

- Si $z = 0$ el determinante de A se anula y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene un menor de orden 2 con

determinante no nulo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su

determinante vale $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $z = -1$ el determinante de A se anula y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene un menor de orden 2 con

determinante no nulo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su

determinante vale $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: El rango de la matriz A es 2 para $z = 0$ y $z = -1$.

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de $f(x)$.
 2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=3$ y $x=4$.

1) Debemos calcular $\int f(x)dx = \int \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx$.

Para ello utilizamos la descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = x \\ \frac{7-3}{2} = 2 = x \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{x-1}{(x-5)(x-2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-5)}{(x-5)(x-2)}$$

$$x-1 = A(x-2) + B(x-5) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=2 \rightarrow 2-1=0+B(2-5) \rightarrow 1=-3B \rightarrow B=-\frac{1}{3} \\ \text{Si } x=5 \rightarrow 5-1=A(5-2)+0 \rightarrow 4=3A \rightarrow A=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{4/3}{x-5} - \frac{1/3}{x-2}$$

Sustituimos en la integral y resolvemos.

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx = \int \frac{4/3}{x-5} - \frac{1/3}{x-2} dx = \int \frac{4/3}{x-5} dx - \int \frac{1/3}{x-2} dx = \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-5} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx = \boxed{\frac{4}{3} \ln|x-5| - \frac{1}{3} \ln|x-2| + K} \end{aligned}$$

- 2) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-7x+10} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Este valor $x=1$ no está entre 3 y 4 por lo que el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=3$ y $x=4$ se obtiene con una integral definida de la función entre 3 y 4.

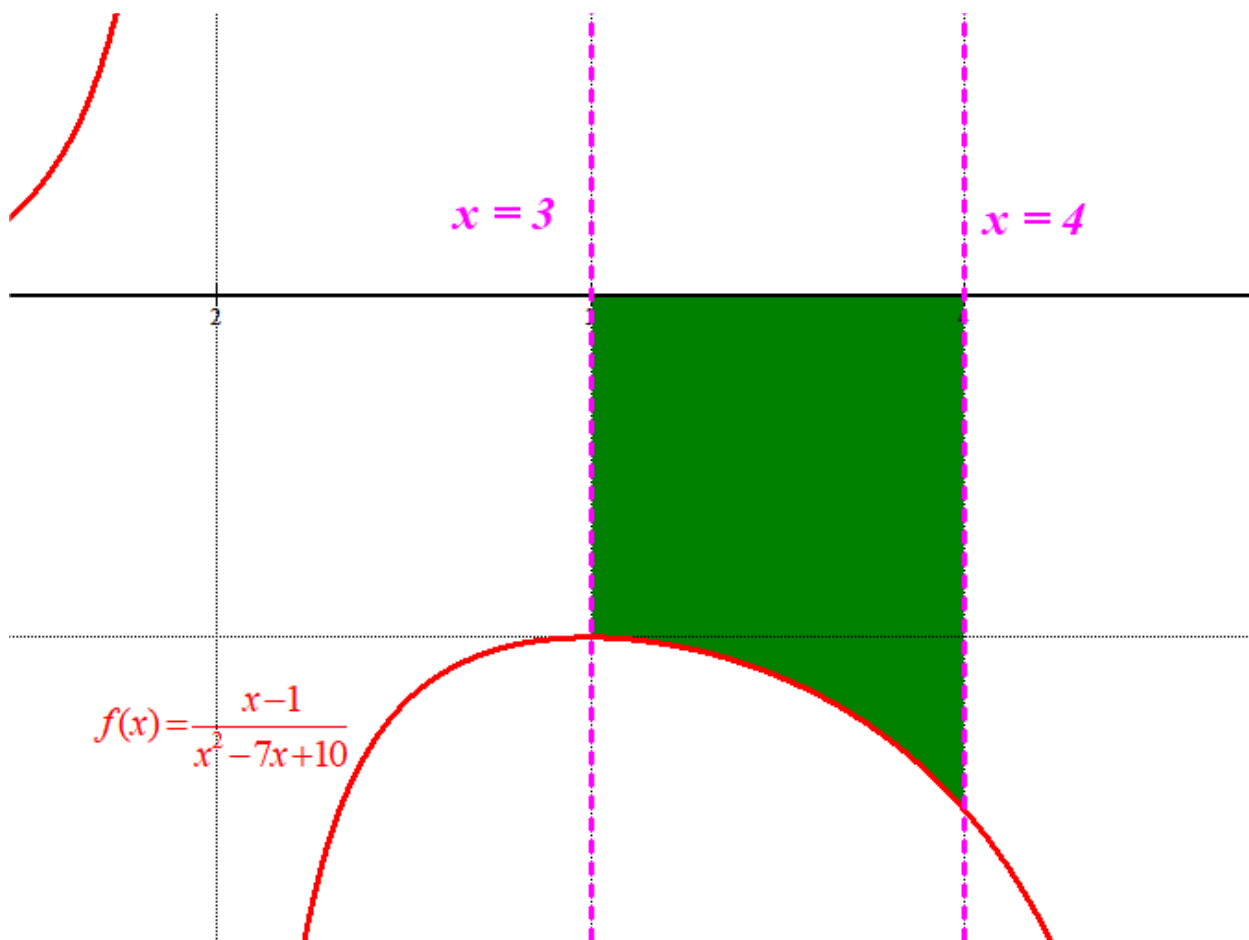
Comprobamos si la función es positiva o negativa en este intervalo.

$$x = 3,5 \Rightarrow f(3,5) = \frac{3,5-1}{(3,5)^2 - 7 \cdot 3,5 + 10} = -1,111 < 0$$

La función es negativa y el área es el valor absoluto de la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_3^4 f(x) dx &= \int_3^4 \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx = \left[\frac{4}{3} \ln|x-5| - \frac{1}{3} \ln|x-2| \right]_3^4 = \\ &= \left[\frac{4}{3} \ln|4-5| - \frac{1}{3} \ln|4-2| \right] - \left[\frac{4}{3} \ln|3-5| - \frac{1}{3} \ln|3-2| \right] = \\ &= \frac{4}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 1 = 0 - \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln 2 + 0 = -\frac{5}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \left| -\frac{5}{3} \ln 2 \right| = \frac{5}{3} \ln 2 = 1,15 u^2}$$



Ejercicio 3

Tomemos la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x - y = 2$.

- 1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.
- 2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .
- 3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π .

4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

- 1) Hallamos el vector director de la recta y el normal del plano.

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 1) \times (2, 0, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j + 2k + j = i + 3j + 2k$$

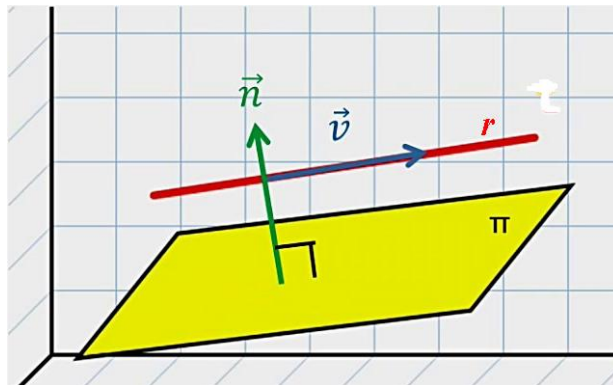
$$\vec{v}_r = (1, 3, 2)$$

$$\Pi: 3x - y = 2 \Rightarrow \vec{n} = (3, -1, 0)$$

Hacemos el producto escalar de ambos vectores y comprobamos si es cero o no.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 3, 2)(3, -1, 0) = 3 - 3 = 0$$

Al ser cero el producto escalar estos vectores son perpendiculares y plano y recta son paralelos.



- 2) Hallamos un punto P cualquiera del plano $\Pi: 3x - y = 2$. Tomamos $x = 0$ y entonces $-y = 2 \rightarrow y = -2$. Como en la ecuación del plano no aparece la z entonces podemos darle cualquier valor. El punto es $P(0, -2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, 3, 2) \\ P(0, -2, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$$

- 3) Hallamos un punto cualquiera de la recta y hallamos la distancia del punto al plano que será lo mismo que la distancia de la recta al plano.

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ \boxed{z = 0} \end{cases} \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow P(0, -1, 0)$$

Tomamos $\boxed{x = 0}$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi: 3x - y = 2 \\ P(0, -1, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \text{distancia}(r, \Pi) = \text{distancia}(P, \Pi) = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \boxed{0,31u}$$

4) Las coordenadas del vector director son los valores de los denominadores:

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_s = (3, 2, 2)}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- 1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro b .
 2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$.

- 1) Este es un sistema de ecuaciones cuya clasificación depende del rango de la matriz de coeficientes A y del rango de la matriz ampliada A/B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz A/B es de dimensión 4×4 empezamos estudiando las posibilidades del valor del rango de esta matriz. Utilizamos Gauss y la transformamos en otra matriz equivalente en cuanto al valor del rango.

$$\begin{aligned} |A/B| &= \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \ 0 \ 2-b \ 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \{ \text{Desarrollo por la columna } 4^a \} = (+1) \begin{vmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - b(2-b) - 2(2-b) = (-b-2)(2-b) \\ |A/B| = 0 &\Rightarrow (-b-2)(2-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -b-2 = 0 \rightarrow b = -2 \\ 2-b = 0 \rightarrow b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $b \neq 2$ y $b \neq -2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es distinto de cero y su rango es 4. Y sin embargo, el rango de la matriz A que es de dimensión 4×3 es como máximo 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $b = 2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es cero y vemos cual puede ser su rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos Gauss para obtener su rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ -1 \ 0 \ 2 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ -2 \ -1 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} \\ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \\ \hline 2 \ -2 \ 0 \ 0 \\ \hline 4 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 1^{\text{a}} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{Cambio fila } 3^{\text{a}} \text{ por fila } 4^{\text{a}}\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \{\text{Cambio la fila } 3^{\text{a}} \text{ por fila } 2^{\text{a}}\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 3 al igual que el rango de A pues A son las tres primeras columnas.

Como el número de incógnitas es 3.

El sistema es compatible determinado.

CASO 3. Si $b = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos Gauss para obtener su rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ -2 \quad 0 \quad -4 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -4 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 2 \cdot \text{Fila 4}^a \\ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ -2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 4}^a \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A/B tiene rango 3, al igual que la matriz A y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

2) Para $b = -2$ el sistema es compatible determinado (solución única) y queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ que es equivalente (visto en el apartado anterior) a:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y - 4z = 2 \\ 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y - 4z = 2 \\ \boxed{z = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ \boxed{y = -1} \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

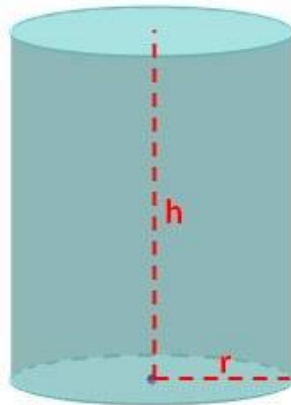
La solución es $x = -1$; $y = -1$; $z = 0$

Ejercicio 2

Se quiere construir un cilindro de volumen $250 \cdot \pi$ metros cúbicos y área mínima.

- 1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura h del cilindro en función del radio r de la base.
- 2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función $a(r)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.
- 3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, área del cilindro: $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$



$$1) \quad V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 250\pi = \pi r^2 h \Rightarrow 250 = r^2 h \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{250}{r^2} \\ a(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{array} \right\} \Rightarrow a(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$$

3) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función área.

$$a(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r} \Rightarrow a'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2}$$

$$a'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{500\pi}{r^2} = 4\pi r \Rightarrow 500\pi = 4\pi r^3 \Rightarrow 125 = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{125} = 5$$

Sustituimos en la derivada segunda y comprobamos el signo para el radio 5.

$$a'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} \Rightarrow a''(r) = 4\pi + 2 \frac{500\pi}{r^3}$$

$$a''(5) = 4\pi + 2 \frac{500\pi}{5^3} > 0$$

El radio de 5 metros nos da un área máxima y el valor de la altura es

$$h = \frac{250}{r^2} = \frac{250}{5^2} = 10 \text{ metros}$$

Ejercicio 3

Sean r y s las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de r y s .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre r y s .
- 3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$.

1) Obtenemos los vectores directores y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, -2) \\ \vec{v}_r = (0, 2, 3) \end{array} \right\}$$

$$s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_s(1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (3, 1, -2) \end{array} \right\}$$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{0}{3} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$, por lo que las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y $\overrightarrow{P_r P_s}$ y comprobamos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (1, 0, -1) - (1, 0, -2) = (0, 0, 1)$$

$$\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s} \right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Al ser distinto de cero los 3 vectores forman un paralelepípedo y las rectas se cruzan.

- 2) La distancia entre las rectas es el cociente del volumen del paralelepípedo anterior dividido entre el área de la base (módulo del producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas).

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 9j - 6k - 3i = -7i + 9j - 6k = (-7, 9, -6)$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{(-7)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{166}$$

$$\text{Distancia}(r, s) = \frac{\left| \left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s} \right] \right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-6|}{\sqrt{166}} = \boxed{0,465 \text{ u}}$$

- 3) El plano perpendicular a s que pasa por $(0, 1, 0)$ tiene como vector normal el vector director de s .

$$\left. \begin{array}{l} (0, 1, 0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_s = (3, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (0, 1, 0) \in \pi \\ 3x + y - 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

$$\boxed{\pi : 3x + y - 2z - 1 = 0}$$