PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

158 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2016

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

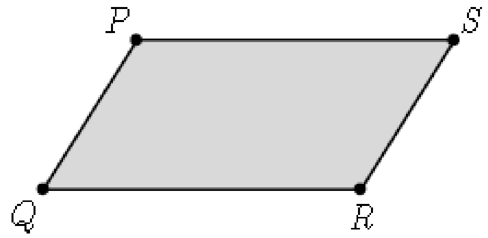
CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

.

a) **[1 punto]** Calcule el determinante de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcule las potencias sucesivas $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$ y $\mathbf{A}^5$. Calcule $\mathbf{A}^{2016}$.

CUESTIÓN A.2: Los puntos P = (1, 1, 1), Q = (2, 2, 2) y R = (1, 3, 3) son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del paralelogramo.
b) **[1,25 puntos]** Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{e^{1+x^2}}$$

se pide:

a) **[1 punto]** Estudie las asíntotas de la gráfica de f (x).

b) **[1,5 puntos]** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx$.

b) **[1 punto]** Determine el valor de a > 0 para que $\int_0^a \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}$

.
OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

a) **[1 punto]** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) **[1,5 puntos]** $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

CUESTIÓN B.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (2, 0, 1) y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v} = (1,0,2)$ y $\vec{w} = (0,1,-2)$. Considere la recta ***r*** dada por

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

a) **[1,25 puntos]** Estudie la posición relativa de π y *r*.

b) **[1,25 puntos]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto Q=(−1, 0, −2), es paralela a π y perpendicular a ***r***.

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & si \quad x < 0 \\ x^2 e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) **[1 punto]** Determine el valor de ***a*** para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx$

b) **[1 punto]** Obtenga una primitiva ***F(x)*** de la función $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ que cumpla la condición ***F(0) = 2***.

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix} sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) **[1 punto] Calcule el determinante de A.**

$$|A|=\begin{vmatrix} sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-sen^2\alpha+0+0-\left(0+\cos^2\alpha+0\right)=-sen^2\alpha-\cos^2\alpha=-\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\boxed{-1}$$

b) **[1,5 puntos] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5. Calcule A^{2016}**.

$$A^2=\begin{pmatrix} sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} sen^2\alpha+\cos^2\alpha & sen\alpha\cos\alpha-\cos\alpha sen\alpha & 0 \\ \cos\alpha sen\alpha-sen\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha+sen^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=Id$$

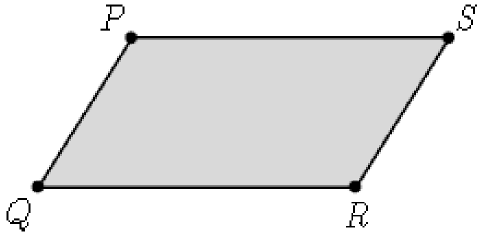
$$A^3=A^2\cdot A=Id\cdot A=A$$

$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=Id$$

$$A^5=A^4\cdot A=Id\cdot A=A$$

Se observa que las potencias pares van a ser la matriz identidad y las impares la matriz A. Por ello $\boxed{\mathbf{A^{2016}=Id}}$

CUESTIÓN A.2: Los puntos P = (1, 1, 1), Q = (2, 2, 2) y R = (1, 3, 3) son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



a) **[1,25 puntos] Calcule el área del paralelogramo**.

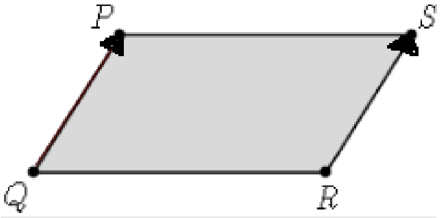
El valor del área se obtiene mediante el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{QP}\ y\ \overrightarrow{QR}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{QP}=(1,1,1)-(2,2,2)=(-1,-1,-1) \\ \overrightarrow{QR}=(1,3,3)-(2,2,2)=(-1,1,1) \end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(0,2,-2)$$

$$Área=\left|(0,2,-2)\right|=\sqrt{0+4+4}=\boxed{\sqrt{8}}$$

b) [1,25 puntos] Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

Consideremos el punto S=(a, b, c), como los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{RS}$ deben ser iguales, se cumplirá:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=(-1,-1,-1)\\ \overrightarrow{RS}=(a,b,c)-(1,3,3)=(a-1,b-3,c-3)\end{array}\right\}\text{Como } \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RS}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-1,-1,-1)=(a-1,b-3,c-3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-1=a-1\\-1=b-3\\-1=c-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}a=0\\b=2\\c=2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{S=(0,2,2)}$$

Algunos prefieren hacerlo por la propiedad que nos dice que el punto medio del segmento $\overline{PR}$ y el punto medio del segmento $\overline{QS}$ es el mismo:

$$\left.\begin{array}{l}Punto\ medio_{PR}=\dfrac{(1,1,1)+(1,3,3)}{2}=\dfrac{(2,4,4)}{2}=(1,2,2)\\ Punto\ medio_{QS}=\dfrac{(2,2,2)+(a,b,c)}{2}=\dfrac{(2+a,2+b,2+c)}{2}=\left(\dfrac{2+a}{2},\dfrac{2+b}{2},\dfrac{2+c}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$(1,2,2)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{2+c}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{2+a}{2}\to 2=2+a\to\boxed{a=0}\\ 2=\dfrac{2+b}{2}\to 4=2+b\to\boxed{b=2}\\ 2=\dfrac{2+c}{2}\to 4=2+c\to\boxed{c=2}\end{cases}$$

El punto **S=(0, 2, 2)**

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x)=\frac{2x}{e^{1+x^2}}$$

se pide:

a) **[1 punto] Estudie las asíntotas de la gráfica de f (x).**

Asíntota vertical. x=a

Ese valor de a que buscamos se obtiene de los valores excluidos del dominio de la función, en este caso, igualamos a cero el denominador de la función →

$$e^{1+x^2}=0\Rightarrow \text{No es posible, la exponencial siempre es positiva}$$

Asíntota vertical No existe

Asíntota horizontal. y=b

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{1+x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\{\text{Regla de L'Hopital}\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2xe^{1+x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{1+x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\{\text{Regla de L'Hopital}\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2xe^{1+x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Asíntota horizontal **y=0**

Asíntota oblicua y=mx+n

Al tener una asíntota horizontal $\boxed{\text{no tiene asíntota oblicua}}$

b) [1,5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

Utilizamos su función derivada $f'(x)=\dfrac{2e^{1+x^2}-2x\cdot 2xe^{1+x^2}}{\left(e^{1+x^2}\right)^2}=\dfrac{e^{1+x^2}\left(2-4x^2\right)}{\left(e^{1+x^2}\right)^2}=\dfrac{2-4x^2}{e^{1+x^2}}$

La igualamos a cero $f'(x)=0$ →

$$\frac{2-4x^2}{e^{1+x^2}}=0\Rightarrow 2-4x^2=0\Rightarrow 2=4x^2\Rightarrow x^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

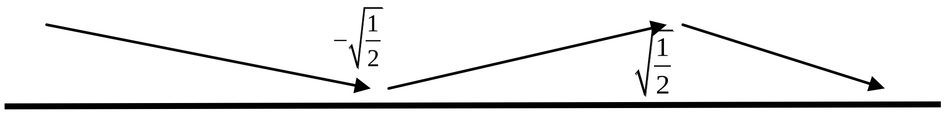
Antes de $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por ejemplo x=-1)→ $f'(-1)=\dfrac{2-4(-1)^2}{e^{1+(-1)^2}}=\dfrac{-2}{e^2}<0$ → La función decrece

Entre $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por ejemplo x=0) → $f'(0)=\dfrac{2-4\cdot 0^2}{e^{1+0^2}}=\dfrac{2}{e^1}>0$ → La función crece

A partir de $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por ejemplo x=1) → $f'(1)=\dfrac{2-4\cdot 1^2}{e^{1+1^2}}=\dfrac{-2}{e^2}<0$ → La función decrece

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y decreciente en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$.

Representando esta información:



Por lo anterior, la función presenta un mínimo en $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo en $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida**

$$\int\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx=\int\frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}\,e^x dx=\left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable}\\ 1+\mathrm{e}^x=t\rightarrow \mathrm{e}^x dx=dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{(t)^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}=$$

$$=\{\text{Deshacemos el cambio}\}=\boxed{\frac{-1}{1+e^x}+C}$$

b) [1 punto] Determine el valor de a > 0 para que $\int_0^a\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx=\dfrac{1}{4}$

$$\int_0^a\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx=\left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a=\frac{-1}{1+e^a}-\frac{-1}{1+e^0}=\frac{-1}{1+e^a}+\frac{1}{2}$$

Como debe ser igual a $\frac{1}{4}$ →

$$\frac{-1}{1+e^a}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-1}{1+e^a}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-1}{1+e^a}=-\frac{1}{4}\Rightarrow -4=-\left(1+e^a\right)\Rightarrow -4=-1-e^a\Rightarrow$$

$$-3=-e^a\Rightarrow 3=e^a\Rightarrow\boxed{a=\ln 3}$$

.
OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$ **, calcule razonadamente los siguientes determinantes:**

a) **[1 punto]**

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Saco factor comun} \\ 3 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ columna} \end{matrix} \right\} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Saco factor comun} \\ 2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ columna} \end{matrix} \right\} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \text{Intercambio fila } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \right\} = 6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 = \boxed{-12}$$

b) **[1,5 puntos]**

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Separo } 1^{\text{a}} \text{ fila en 2 determinantes} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \text{Separo } 2^{\text{a}} \text{ fila en 2 determinantes} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ saco factor comun 3 en } 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ , } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ fila son proporcionales} \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ , } 2^{\text{a}} \text{ fila es } 3 \cdot 1^{\text{a}} \text{ fila} \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ , } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ fila son proporcionales} \end{matrix} \right\} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= \left\{ \text{Intercambio fila } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \right\} = 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Intercambio fila } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \right\} = 3 \cdot (-1)(-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = \boxed{6}$$

CUESTIÓN B.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (2, 0, 1) y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{w}=(0,1,-2)$. Considere la recta *r* dada por

$$r:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$$

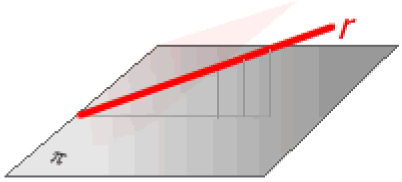
a) **[1,25 puntos] Estudie la posición relativa de π y *r*.**

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$.

Para que la recta sea paralela o incluida en el plano deben ser los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{v_r}$ dependientes, comprobemoslo:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-(4+0-6)=3\neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes y por tanto $\boxed{\text{la recta } \mathbf{r} \text{ es secante con el plano } \boldsymbol{\pi}}$.



__Otra forma de averiguarlo__. Calculemos el vector normal al plano, mediante el producto vectorial de $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{w}=(0,1,-2) \rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-2,2,1)$

Si este vector normal y el vector director de la recta son ortogonales, la recta estará en el mismo plano o será paralela a él. Comprobémoslo con el producto escalar de ambos:

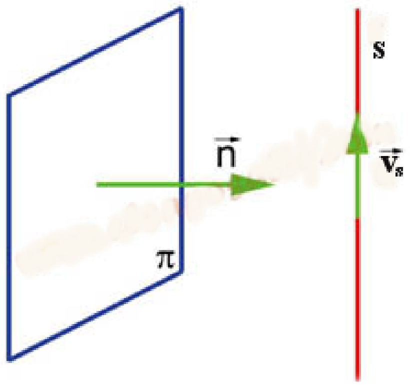
$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=(2,3,1)\cdot(-2,2,1)=-4+6+1=3\neq 0$

Por lo que $\boxed{\text{la recta es secante con el plano } \pi}$

b) **[1,25 puntos] Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto Q=(−1, 0, −2), es paralela a π y perpendicular a *r*.**

Solo necesito un vector director de la recta para establecer la ecuación:

$$s:\frac{x+1}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z+2}{c}$$



Este vector $\overrightarrow{v_s}=(a,b,c)$ es paralelo al plano y por lo tanto perpendicular al vector normal del plano, como también es perpendicular al vector $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$, este vector que buscamos es el producto vectorial de $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$ y $\vec{n}=(-2,2,1)$

$$\overrightarrow{v_r} \times \vec{n} = (2,3,1)\times(-2,2,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1,-4,10)$$

Así $\overrightarrow{v_s} = (1,-4,10)$ y la ecuación de la recta pedida es:

$$\boxed{s: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{10}}$$

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & si \quad x < 0 \\ x^2 e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos] Calcule** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Empecemos con el límite en **– ∞**, como la función es definida a trozos utilizaremos la rama que esta cercana a -∞:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(a+\ln(1-x)\right) = a+\ln(+\infty) = a+\infty = \boxed{+\infty}$$

En el límite en **+ ∞** utilizaremos la rama de la función próxima a dicha zona y:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{+\infty}{+\infty} = \{\text{Regla de L'Hopital}\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = \frac{+\infty}{+\infty} = \{\text{Regla de L'Hopital}\} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right) = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

b) **[1 punto] Determine el valor de *a* para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

Para ello basta con lograr que sea continua en x=0. Calculamos los límites laterales de la función en el punto x=0 e igualémoslos al valor de la función en x=0:

$$\lim_{x\to0^-}\left(a+\ln(1-x)\right) = a+\ln 1 = a$$

$$\lim_{x\to0^+} x^2e^{-x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f(0) = 0^2\cdot e^{-0} = 0\cdot 1 = 0$$

Por lo tanto los limites laterales deben ser iguales, así $\boxed{\textbf{a=0}}$

CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida** $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx = \int\frac{x^3+x}{x^2+1}dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx = \int\frac{x\left(\cancel{x^2+1}\right)}{\cancel{x^2+1}}dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \int xdx + \int\frac{1}{x^2+1}dx = \boxed{\frac{x^2}{2}+arctgx+C}$$

<u>**Otra forma de resoverlo:**</u>

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Realizo la división de polinomios que aparece en la integral} \\ \begin{array}{llll} x^3 & +x & +1 & \underline{|x^2+1} \\ -x^3 & -x & & x \\ \hline & & 1 & \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \int x + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x\left(\cancel{x^2+1}\right)}{\cancel{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + arctgx + C}$$

b) **[1 punto] Obtenga una primitiva *F(x)* de la función** $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ **que cumpla la condición *F(0) = 2***.

F(x) ya lo hemos calculado → $F(x) = \frac{x^2}{2} + arctgx + C$, entonces debe cumplirse que

$$F(0) = \frac{0^2}{2} + arctg0 + C = 2$$
$$0 + 0 + C = 2$$

El parámetro C=2 y por tanto la primitiva pedida es $\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + arctgx + 2}$