



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2017

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

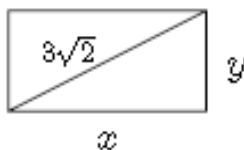
Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

- 1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .
- 2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

Ejercicio 2

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



- 2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$.

Ejercicio 3

Sean $P: x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos

- 1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).
- 2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .
- 3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .
- 4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases} .$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B .$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t , calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ be^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

2) [1 PUNTO] Si $a = 1$, $b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q: (0, 0, 1) + s\overline{(2, -1, 0)} + t\overline{(2, -1, 1)}$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por $(-1, 2, 4)$ que sea perpendicular al plano Q .

3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto $(-1, 2, 4)$ al plano Q .

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

- 1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .
 2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

1) Veamos cuando se anula el determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{vmatrix} = -x^3 - x^3 + 2x^2 + x^3 + x^2 - 2x^3 = -3x^3 + 3x^2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -3x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x+1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

En este caso el determinante de M es no nulo y su **rango es 3**.

CASO 2. $x = 0$.

En este caso el determinante de M es nulo y su rango no es 3. Veamos si es 2 o 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Solo tiene un elemento no nulo, por lo que el } \mathbf{rango de } M \mathbf{ es 1.}$$

CASO 3. $x = 1$.

En este caso el determinante de M es nulo y su rango no es 3. Veamos si es 2 o 1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna } 1^{\text{a}}$$

(igual que la 3ª) y la fila 1ª (igual que la 2ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0. \mathbf{El rango de } M \mathbf{ es 2.}$$

2) Para $x = -1$ la matriz M tiene inversa pues su determinante es no nulo.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+2-1+1+2 = 6$$

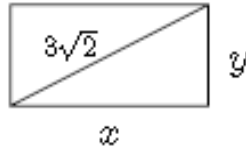
$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2).

1) Aplicando el teorema de Pitágoras la relación entre los lados del rectángulo es:

$$x^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 18 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{18 - x^2}$$

El perímetro es la suma de los lados del rectángulo:

$$P(x) = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{18 - x^2}$$

Busco el máximo de esta función usando la derivada.

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{18 - x^2} \Rightarrow P'(x) = 2 + 2 \frac{-2x}{2\sqrt{18 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}} = 2 \Rightarrow 2x = 2\sqrt{18 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{18 - x^2} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{18 - x^2})^2 \Rightarrow x^2 = 18 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

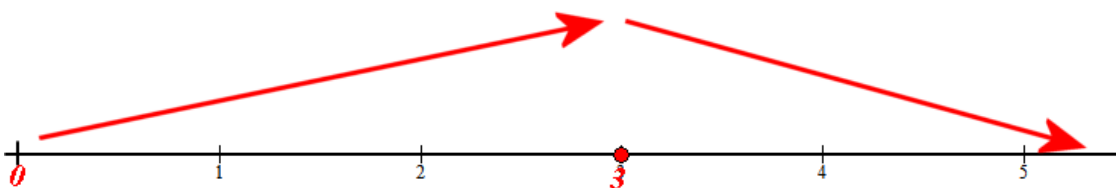
Veamos cómo es la función para valores menores y mayores de 3.

- Para valores de 0 a 3 cm tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$P'(1) = 2 - \frac{2}{\sqrt{18 - 1^2}} = 1,51 > 0 \text{ y la función (el perímetro) crece de 0 a 3.}$$

- Para valores mayores que 3 cm tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$P'(4) = 2 - \frac{8}{\sqrt{18 - 4^2}} = -3,65 < 0 \text{ y la función (el perímetro) decrece a partir de 3 cm.}$$



El perímetro es máximo para $x = 3$ cm. En este rectángulo la altura vale $y = \sqrt{18 - 3^2} = 3$.

El perímetro es máximo para el cuadrado de lado 3 cm.

2) La recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$ tiene ecuación:

$$y - 2 = h'(1)(x - 1)$$

Calculamos el valor de la derivada de la función para $x = 1$.

$$h(x) = x^2 + x \Rightarrow h'(x) = 2x + 1 \Rightarrow h'(1) = 2 + 1 = 3$$

Sustituimos y obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$\left. \begin{array}{l} y - 2 = h'(1)(x - 1) \\ h'(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 1}$$

Ejercicio 3

Sean $P: x+3y+2z-1=0$ y $Q: 2x+6y+4z+3=0$ dos planos

- 1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).
- 2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .
- 3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .
- 4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

$$1) P: x+3y+2z-1=0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$$

2)

PRIMERA FORMA. Despejamos “y” y “z” en la ecuación del plano.

$$P: x+3y+2z-1=0 \Rightarrow x=1-3y-2z \Rightarrow \begin{cases} x=1-3\lambda-2\alpha \\ y=\lambda \\ z=\alpha \end{cases}$$

SEGUNDA FORMA. Obtengamos tres puntos del plano que no estén alineados y con ellos obtendremos dos vectores directores del plano y las ecuaciones paramétricas de dicho plano.

$$\left. \begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \\ y=0; z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \\ y=1; z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x+3-1=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow B(-2,1,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \\ y=0; z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow x+2-1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow C(-1,0,1)$$

Obtenemos los vectores directores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \in P \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2,1,0) - (1,0,0) = (-3,1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,1) - (1,0,0) = (-2,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow P: \begin{cases} x=1-3\lambda-2\alpha \\ y=\lambda \\ z=\alpha \end{cases}$$

- 3) Estudiemos la posición relativa de sus vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2) \\ Q: 2x+6y+4z+3=0 \Rightarrow \vec{n}' = (2, 6, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

Los vectores normales de ambos planos son proporcionales por lo que los planos son paralelos o coincidentes.

No son coincidentes pues el punto $A(1,0,0)$ del plano P no pertenece al plano Q .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \\ P: x+3y+2z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+0+0-1=0; \text{Cierto!} \Rightarrow A(1,0,0) \in P$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \\ Q: 2x+6y+4z+3=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2+0+0+3=0; \text{Falso!} \Rightarrow A(1,0,0) \notin Q$$

Los planos P y Q son paralelos.

- 4) La recta r normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$ tiene como vector director el vector normal a Q.

$$\left. \begin{array}{l} (0,0,0) \in r \\ \vec{v} = \vec{n} = (2,6,4) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases} .$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B .$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t , calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

1) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix}$ y la matriz de los términos independientes

$$\text{es } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} . \text{ La ecuación matricial es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

2) Discutimos el sistema, empezando por investigar el posible valor del rango de A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix} = t + (t+1)(t-1) + 2t^2 - (t-1) - 2t^2 - t(t+1) = \\ &= \cancel{t} + \cancel{t^2} - 1 - \cancel{t} + 1 - \cancel{t^2} - t = -t \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Estudiaremos dos situaciones diferentes.

Situación 1ª. $t \neq 0$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

Situación 2ª. $t = 0$

En este caso el determinante es nulo y el rango de A no es 3. Veamos cómo queda la matriz A y cuál es su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la}$$

columna 3ª (igual que la columna 2ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango

de A es 2.

¿Cuál es el rango de la matriz ampliada A/B?

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ tiene un menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª}$$

(igual que la columna 3ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 + 3 + 0 + 0 = 0. \text{ El rango de A/B no es 3.}$$

Como el rango de A es 2 el de A/B también es 2 y es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos el sistema para $t \neq 0$ utilizando el método de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \\ -2 & t & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}} = \frac{3t - 2(t+1) + t + 2 - t - 3t(t+1)}{-t} = \frac{\cancel{3t} - 2\cancel{t} - 2\cancel{t} + 2\cancel{t} - \cancel{t} - 3t^2 - 3t}{-t} =$$

$$= \frac{-3t^2 - 2t}{-t} = 3t + 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & -2 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}} = \frac{t + 3(t+1)(t-1) - 4t - (t-1) - 6t^2 + 2(t+1)}{-t} =$$

$$= \frac{\cancel{t} + 3\cancel{t}^2 - 3\cancel{t} - 4\cancel{t} - \cancel{t} - 6t^2 + 2\cancel{t} + 2}{-t} = \frac{-3t^2 - 2t}{-t} = 3t + 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2t & 1 & 1 \\ t-1 & t & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}} = \frac{-2+t-1+6t^2-3t+3+4t-t}{-t} = \frac{6t^2+t}{-t} = -6t-1$$

La solución cuando $t \neq 0$ es: $x = 3t + 2$; $y = 3t + 2$; $z = -6t - 1$

Resolvemos el sistema cuando $t = 0$.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 1 \\ -x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 1 \\ \boxed{x = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + y + z = 3 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - z}$$

Cuando $t = 0$ las soluciones son $x = 2$; $y = 1 - t$; $z = t$.

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ be^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

- 1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .
 2) [1 PUNTO] Si $a = 1$, $b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$.
 3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

- 1) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 3$ y en $x = 5$.

En $x = 3$

- Existe el límite de la función en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + x + 3 = 9a + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x^2 - 3 = 15 \end{cases} \right\} \text{Deben ser iguales} \Rightarrow 9a + 6 = 15 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$$

- Existe la función en $x = 3$. $f(3) = ax^2 + x + 3 = 9a + 6 = 15$
- El valor de la función y el límite son iguales.

Si tomamos $a = 1$ la función es continua en $x = 3$.

En $x = 5$

- Existe el límite de la función en $x = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} 2x^2 - 3 = 47 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} be^x = be^5 \end{cases} \right\} \text{Deben ser iguales} \Rightarrow 47 = be^5 \Rightarrow b = \frac{47}{e^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 47$$

- Existe la función en $x = 5$. $f(5) = \frac{47}{e^5} e^5 = 47$
- El valor de la función y el límite son iguales.

Si tomamos $b = \frac{47}{e^5}$ la función es continua en $x = 5$.

Resumiendo: Los valores que hacen la función continua son $a = 1$ y $b = \frac{47}{e^5}$

2) Si $a = 1$, $b = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 3e^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$.

Como nos piden el área del recinto entre $x = -1$ y $x = 3$ la rama de la función que vamos a utilizar solo es la rama $f(x) = x^2 + x + 3$.

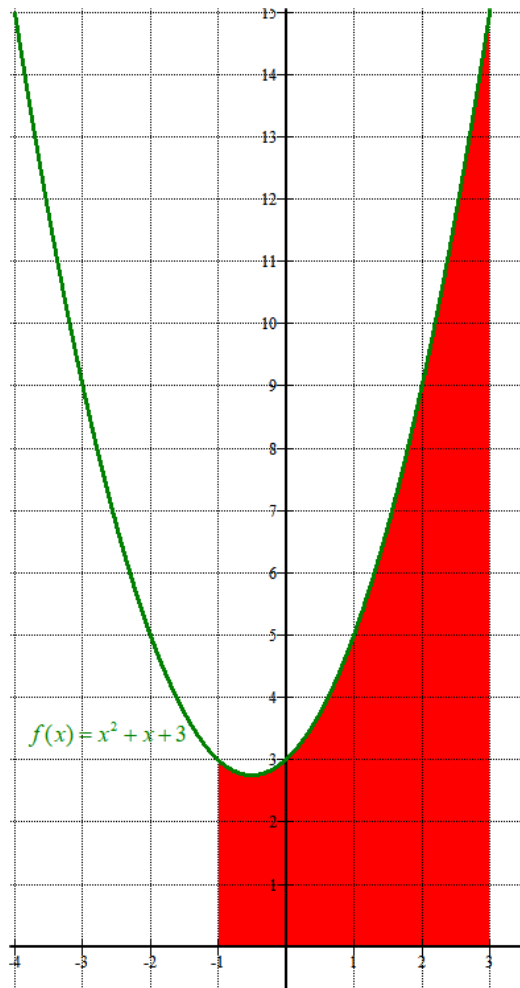
Veamos si la gráfica corta el eje de abscisas.

$$\left. \begin{matrix} f(x) = x^2 + x + 3 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} = \text{No existe}$$

Tomamos $x = 0$ para ver si la función es positiva o negativa $\rightarrow f(0) = 0^2 + 0 + 3 = 3 > 0$

No corta al eje de abscisas y la función es siempre positiva. El área será el valor de la integral definida de la función entre -1 y 3 .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 x^2 + x + 3 dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^3 = \left[\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right] = \\ &= 9 + \frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \boxed{25,33 u^2} \end{aligned}$$



El valor hallado para el área coincide con el valor aproximado que se puede obtener contando cuadraditos en el dibujo superior.

- 3) Hallamos los extremos relativos con la derivada primera.

$$g(x) = 2x^2 + x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x + 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Comprobamos si es máximo o mínimo con la derivada segunda.

$$g'(x) = 4x + 1 \Rightarrow g''(x) = 4 \Rightarrow g''\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 > 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{4}$. La función es una parábola y este es su

vértice. $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{21}{8}$. El mínimo es el punto $\left(-\frac{1}{4}, \frac{21}{8}\right)$

Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q: (0,0,1) + s(2,-1,0) + t(2,-1,1)$.

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por $(-1,2,4)$ que sea perpendicular al plano Q.
- 3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto $(-1,2,4)$ al plano Q.

1)

$$Q: (0,0,1) + s(2,-1,0) + t(2,-1,1) \Rightarrow Q: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x - 2z + 2 + 2z - 2 - 2y = 0 \Rightarrow -x - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{Q: x + 2y = 0}$$

- 2) Si la recta es perpendicular al plano Q tendrá como vector director el normal del plano $Q: x + 2y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} (-1, 2, 4) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

- 3) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto $(-1,2,4)$ a un plano $Q: x + 2y = 0$.

$$d((-1, 2, 4), Q) = \frac{|-1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} u$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Hallo el punto de corte de la recta hallada en el apartado 2) con el plano Q hallado en el apartado 1) y la distancia del punto al plano será el módulo del vector que une un punto con el otro.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \\ Q: x + 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow -1 + \lambda + 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \\ y = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 4\right)$$

$$\begin{aligned} d((-1, 2, 4), Q) &= d((-1, 2, 4), A) = \left| \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 4\right) - (-1, 2, 4) \right| = \\ &= \left| \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} u \end{aligned}$$