# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

## Curso 2016-2017

Asignatura: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

## OPCIÓN A

**1.- (a)** Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **(0,5 puntos)**

**(b)** Obtenga el determinante de la matriz $B = \dfrac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B. **(0,5 puntos)**

**(c)** Calcule la matriz inversa de A. **(1,5 puntos)**

**2.-** Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

**(a)** Obtenga un vector director de la recta *s*. **(0,5 puntos)**

**(b)** Obtenga el plano $\Pi_1$ que contiene a *r* y es paralelo a *s*. **(1 punto)**

**(c)** Obtenga el plano $\Pi_2$ que contiene a *r* y es perpendicular a *s*. **(1 punto)**

**3.- (a)** Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange. **(0,75 puntos)**

**(b)** Aplicando a la función $f(x) = 1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los número reales 1 < a < b se cumple la desigualdad $a + b < 2a^2b^2$. **(1,25 puntos)**

**4.-** Calcule una primitiva *F(x)* de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cos\left(x^2\right)$$

que cumpla *F(0) = 0.* **(2 puntos)**

**5.-** En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores. **(1 punto)**

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
## Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

## OPCIÓN B

**1.-** Considere el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x + y \quad\; = 0 \\ x \quad\; - z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \end{array}\right\}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

(a) Para que el sistema sea compatible determinado. **(0,75 puntos)**
(b) Para que el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**
(c) Para que el sistema sea incompatible. **(0,75 puntos)**

**2.-** Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos A (1, 2, 1), B = (–2, –1, –3), C = (0, 1, –1) y D = (0, 3, –1), y sea *r* la recta que pasa por A y B.
**(a)** Calcule ecuaciones paramétricas de *r*. **(1 punto)**
**(b)** Obtenga un punto P de la recta *r* tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P. **(1,5 puntos)**

**3.-** Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$ **(2 puntos)**

**4.- (a)** Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ definida en el intervalo cerrado [0,2]. **(0,5 puntos)**
**(b)** Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$. **(1,5 puntos)**

**5.-** El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer. **(1 punto)**

# SOLUCIONES

## OPCIÓN A

**1.- (a)** Calcule el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$ **(0,5 puntos)**

**(b)** Obtenga el determinante de la matriz $B=\frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B. **(0,5 puntos)**

**(c)** Calcule la matriz inversa de A. **(1,5 puntos)**

(a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=1+0+0+2-0-0=3$$

(b)

$$|B|=\left|\frac{1}{3}A^4\right|=\frac{1}{3}\left|A^4\right|=\frac{1}{3}|A|^4=\frac{1}{3}3^4=3^3=27$$

(c) $|A|=3\neq 0$

La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 1/3\\ 0 & -1 & 0\\ 2/3 & 0 & -1/3\end{pmatrix}$$

**2.-** Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

**(a)** Obtenga un vector director de la recta *s*. **(0,5 puntos)**
**(b)** Obtenga el plano $\Pi_1$ que contiene a *r* y es paralelo a *s*. **(1 punto)**
**(c)** Obtenga el plano $\Pi_2$ que contiene a *r* y es perpendicular a *s*. **(1 punto)**

**(a)** $s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} P_s(1,0,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \end{cases}$

Un vector director de la recta *s* es $\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)$

**(b)**

$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(0,0,1) \end{cases}$$

El plano que contiene la recta *r* tiene como vector director el vector director de *r* $\overrightarrow{v_r}=(0,0,1)$ y como es paralelo a la recta *s* también tiene como vector director el vector director de *s* $\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0)\in\Pi_1 \\ \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(0,0,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y-x=0 \Rightarrow \boxed{\Pi_1 \equiv x+y=0}$$

**(c)** El plano perpendicular a *s* tiene como vector normal el vector director de la recta *s* $\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)$. Y como contiene a la recta *r* debe contener el punto $P_r(0,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0)\in\Pi_2 \\ \vec{n}=\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0)\in\Pi_2 \\ \Pi_2 \equiv -x+y+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0+0+D=0 \Rightarrow D=0$$

$$\boxed{\Pi_2 \equiv -x+y=0}$$

**3.- (a)** Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange. **(0,75 puntos)**
**(b)** Aplicando a la función $f(x)=1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los número reales 1 < a < b se cumple la desigualdad $a+b<2a^2b^2$. **(1,25 puntos)**

**(a)** Si *f(x)* es continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$, tal que: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, con $c\in(a,b)$.

**(b)** La función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es continua en el intervalo [a, b] con la condición de que 1 < a < b y por tanto en el intervalo no está el valor 0.

Es derivable en el intervalo (a, b) y su derivada es $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Por lo que existe un valor $c\in(a,b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Esto implica que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{b-a}=-\frac{2}{c^3}\Rightarrow\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}{b-a}=-\frac{2}{c^2}\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{(b-a)a^2b^2}=-\frac{2}{c^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-(b^2-a^2)}{(b-a)a^2b^2}=-\frac{2}{c^3}\Rightarrow-\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{(b-a)}a^2b^2}=-\frac{2}{c^3}\Rightarrow\frac{(b+a)}{a^2b^2}=\frac{2}{c^3}$$

Como además $c\in(a,b)$ y 1 < a < b → 1 < a < c < b.

Por lo que $c>1\Rightarrow c^3>1\Rightarrow\frac{1}{c^3}<\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{2}{c^3}<\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{2}{c^3}<2$

Uniendo estas dos expresiones tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{(b+a)}{a^2b^2}=\frac{2}{c^3}\\ \frac{2}{c^3}<2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{(b+a)}{a^2b^2}<2\Rightarrow\left\{Como\ a^2b^2>0\right\}\Rightarrow\boxed{b+a<2a^2b^2}$$

**4.-** Calcule una primitiva *F(x)* de la función

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-e^{-x}+2x\cos\left(x^2\right)$$

que cumpla *F(0) = 0*. **(2 puntos)**

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{2x}{x^2+1}-e^{-x}+2x\cos\left(x^2\right)dx=$$

$$=\int \frac{2x}{x^2+1}dx-\int e^{-x}dx+\int 2x\cos\left(x^2\right)dx=$$

$$=\ln\left(x^2+1\right)+e^{-x}+\ldots$$

$$\int 2x\cos\left(x^2\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=x^2\rightarrow dt=2xdx\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\end{array}\right\}=\int \cancel{2x}\cos t\frac{dt}{\cancel{2x}}=\int \cos t dt=-sent=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=x^2\end{array}\right\}=-sen\left(x^2\right)$$

$$\ldots=\ln\left(x^2+1\right)+e^{-x}-sen\left(x^2\right)+K$$

$$\left.\begin{array}{r}F(x)=\ln\left(x^2+1\right)+e^{-x}-sen\left(x^2\right)+K\\ F(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \ln\left(0^2+1\right)+e^{-0}-sen\left(0^2\right)+K=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+K=0\Rightarrow K=-1$$

La primitiva buscada es $F(x)=\ln\left(x^2+1\right)+e^{-x}-sen\left(x^2\right)-1$

**5.-** En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores. **(1 punto)**

Hacemos una tabla de contingencia para completar y aclarar los datos proporcionados en el problema.

| | Capítulo 1 | Capítulo 2 | Capítulo 3 | TOTALES |
|---|---|---|---|---|
| Nº páginas con errores | 15 | 8 | | |
| Nº páginas sin errores | | | 80% de 50 = 40 | |
| TOTALES | 100 | 80 | 50 | |

Completamos la tabla.

| | Capítulo 1 | Capítulo 2 | Capítulo 3 | TOTALES |
|---|---|---|---|---|
| Nº páginas con errores | 15 | 8 | **10** | **33** |
| Nº páginas sin errores | **85** | **72** | 40 | **197** |
| TOTALES | 100 | 80 | 50 | **230** |

Una vez obtenida toda la información sobre el problema, respondemos a la pregunta planteada aplicando la regla de Laplace.

$$P\left(\text{Una página no sea del capítulo 2 y sin errores}\right)=\frac{N^o\,casos\ \ favorables}{N^o\,casos\ \ posibles}=$$

$$=\frac{85+40}{230}=\boxed{\frac{25}{46}=0,543}$$

# OPCIÓN B

**1.-** Considere el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \end{array}\right\}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

(a) Para que el sistema sea compatible determinado. **(0,75 puntos)**

(b) Para que el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

(c) Para que el sistema sea incompatible. **(0,75 puntos)**

PRIMERA FORMA DE HACERLO

Consideramos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -a - c + b$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a - c + b = 0 \Rightarrow b = a + c$$

Distinguimos dos casos distintos.

CASO 1. $b \neq a + c$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, por lo que el rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. **El sistema es compatible determinado**.

CASO 2. $b = a + c$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª fila y columna → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de la matriz A es 2.

Veamos el rango de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ a & a+c & c & 1 \end{array}\right)$$ Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª

→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a+c & c & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a+c & c & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - c = -1 - c$

Lo igualamos a cero $-1 - c = 0 \Rightarrow c = -1$

Tenemos dos situaciones distintas:

CASO 2.1. $b = a + c$ y también $c = -1$

En este caso el rango de A es 2 (visto antes) y el rango de A/B es también 2 pues el determinante del menor de orden 3 se anula. El número de incógnitas es 3. **El sistema es compatible indeterminado**.

CASO 2.2. $b=a+c$ y $c\neq -1$

En este caso el rango de A es 2 (visto antes) y el rango de A/B es 3 pues el determinante del menor de orden 3 es no nulo. **El sistema es incompatible**.

(a) $b\neq a+c$
(b) $b=a+c$ y también $c=-1$. Es decir, para $b=a-1$ y $c=-1$
(c) $b=a+c$ y $c\neq -1$

SEGUNDA FORMA DE HACERLO

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-z=1 \\ ax+by+cz=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x \\ z=x-1 \\ ax+by+cz=1 \end{array}\right\} \Rightarrow ax+b(-x)+c(x-1)=1 \Rightarrow ax-bx+cx-c=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(a-b+c)=1+c$$

Si $a-b+c\neq 0$ entonces puedo despejar el valor de x pasando a dividir esta expresión.

$\left.\begin{array}{l} x(a-b+c)=1+c \\ a-b+c\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{1+c}{a-b+c}$ y a partir de aquí obtenemos el valor de "y" y "z". **El sistema es compatible determinado**.

Si $a-b+c=0$ entonces la expresión se queda:

$$\left.\begin{array}{l} x(a-b+c)=1+c \\ a-b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=1+c$$

Distinguimos dos casos diferentes según sea "1 + c" igual o distinto de cero.

Si $a-b+c=0$ y $1+c=0$ entonces queda una igualdad 0 = 0. Por lo que la solución del sistema es $\left.\begin{array}{l} y=-x \\ z=x-1 \end{array}\right\}$. **El sistema es compatible indeterminado**.

Si $a-b+c=0$ y $1+c\neq 0$ entonces queda una igualdad imposible $0=1+c$**. El sistema es incompatible.**

**(a)** $a-b+c\neq 0$

**(b)**

$$\left.\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ 1+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b-1=0 \Rightarrow a=b+1$$

Deben ser los valores $a=b+1$ y $c=-1$.

**(c)** $a-b+c=0$ y $1+c\neq 0$ $\rightarrow a-b+c=0$ y $c\neq -1$

**2.-** Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos A (1, 2, 1), B = (–2, –1, –3), C = (0, 1, –1) y D = (0, 3, –1), y sea *r* la recta que pasa por A y B.
**(a)** Calcule ecuaciones paramétricas de *r*. **(1 punto)**
**(b)** Obtenga un punto P de la recta *r* tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P. **(1,5 puntos)**

**(a)** La recta que pasa por A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,-1,-3)-(1,2,1) = (-3,-3,-4)$

Puedo tomar como vector director este vector pero multiplicado por (–1)

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{v_r} = (3,3,4)\\ A(1,2,1)\end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases}x = 1+3\lambda\\ y = 2+3\lambda\\ z = 1+4\lambda\end{cases}$$

**(b)** Un punto P de la recta *r* tiene coordenadas $P(1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda)$.

Hallamos la expresión de ambas distancias.

Distancia de C a P:

$$\overrightarrow{CP} = (1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda)-(0,1,-1) = (1+3\lambda, 1+3\lambda, 2+4\lambda)$$

$$d(C,P) = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{(1+3\lambda)^2+(1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2}$$

Distancia de D a P:

$$\overrightarrow{DP} = (1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda)-(0,3,-1) = (1+3\lambda, -1+3\lambda, 2+4\lambda)$$

$$D(D,P) = \left|\overrightarrow{DP}\right| = \sqrt{(1+3\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2}$$

Igualamos las dos expresiones:

$$d(C,P) = D(D,P)$$

$$\sqrt{(1+3\lambda)^2+(1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2} = \sqrt{(1+3\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2}$$

$$\cancel{(1+3\lambda)^2}+(1+3\lambda)^2+\cancel{(2+4\lambda)^2} = \cancel{(1+3\lambda)^2}+(-1+3\lambda)^2+\cancel{(2+4\lambda)^2}$$

$$(1+3\lambda)^2 = (-1+3\lambda)^2 \Rightarrow \cancel{1}+\cancel{9\lambda^2}+6\lambda = \cancel{(-1)^2}+\cancel{9\lambda^2}-6\lambda \Rightarrow 12\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

El punto buscado es $\left.\begin{matrix}P(1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda)\\ \lambda = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow P(1,2,1)$

La solución es el punto A proporcionado en el enunciado.

**3.-** Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función
$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$$ **(2 puntos)**

El dominio de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$ son todos los reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

El **dominio de la función** es $\mathbb{R}-\{0,-1\}$

Para el estudio del signo de la función, veamos cuando se anula el numerador y el denominador de la fracción algebraica.

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

- En $(-\infty,-1)$ tomamos *x = 2* y la función vale $f(-2)=\dfrac{2(-2)+1}{(-2)^2-2}=\dfrac{-3}{2}<0$
- En $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ tomamos *x = –0,75* y la función vale
  $$f(-0,75)=\frac{2(-0,75)+1}{(-0,75)^2-0,75}=\frac{-0,5}{-0,18}>0$$
- En $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ tomamos *x = –0,25* y la función vale
  $$f(-0,25)=\frac{2(-0,25)+1}{(-0,25)^2-0,25}=\frac{0,5}{-0,1875}<0$$
- En $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la función vale $f(1)=\dfrac{2+1}{1^2+1}=\dfrac{3}{2}>0$

La función es **positiva** en $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$ y es **negativa** en $(-\infty,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

**Asíntota vertical**. $x=a$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=\dfrac{1}{0}=\infty$ La recta $x=0$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=\dfrac{-1}{0}=\infty$ La recta $x=-1$ es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal**. $y=b$

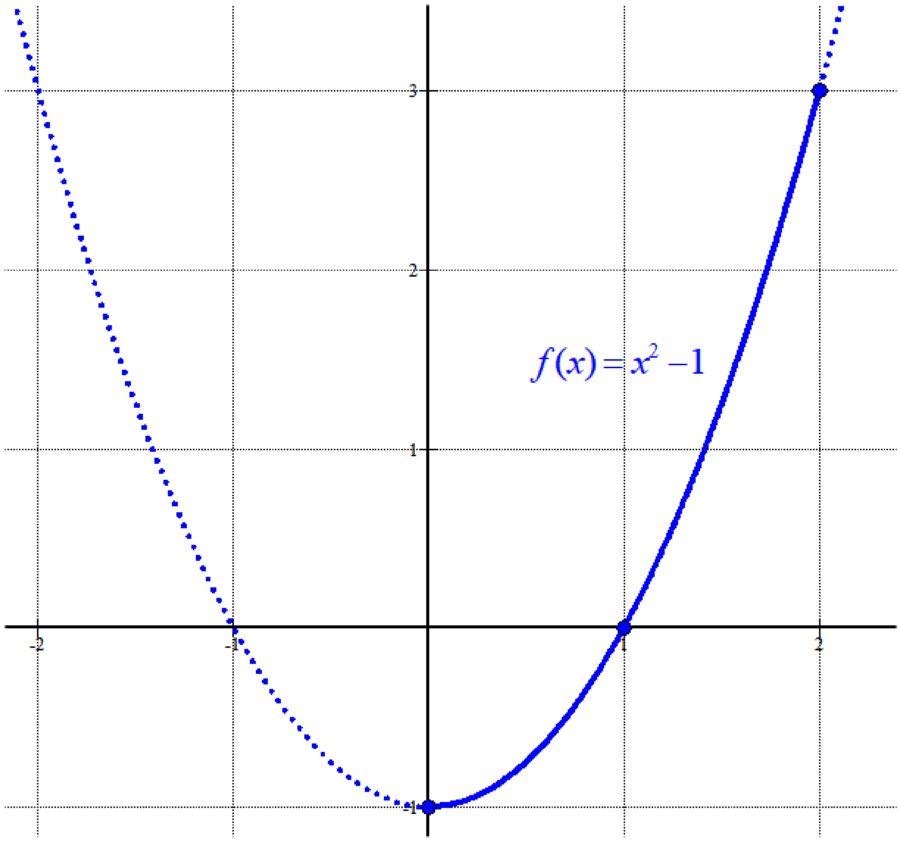
$b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{\infty}=0$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

**4.- (a)** Representa, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$ definida en el intervalo cerrado [0,2]. **(0,5 puntos)**

**(b)** Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$. **(1,5 puntos)**

(a) Esta función es una parábola. Para dibujarla hacemos una tabla de valores en el intervalo [0,2]

| $x$ | $y=x^2-1$ |
|---|---|
| 0 | $-1$ |
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |




(b) Dividimos el recinto en dos partes una entre $x = 0$ y $x = 1$ y la otra entre $x = 1$ y $x = 2$.

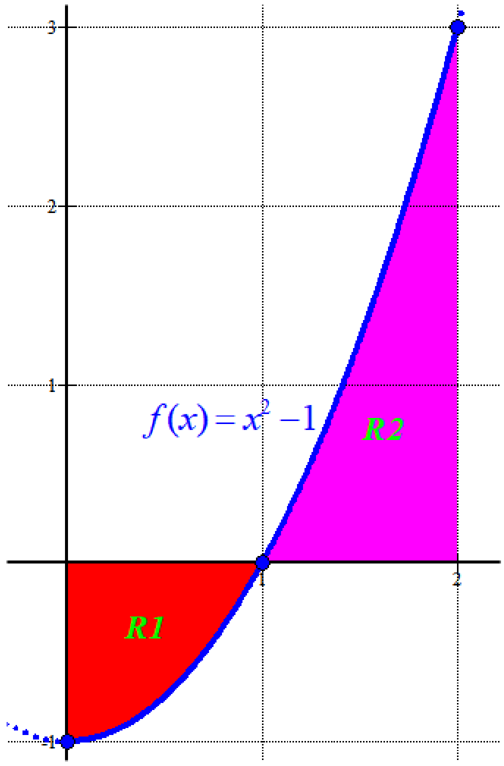
$$\text{Área de } R1 = \left|\int_0^1 x^2-1dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{1^3}{3}-1\right]-\left[\frac{0^3}{3}-0\right]\right| = \left|\frac{1}{3}-1\right| = \frac{2}{3}u^2$$

$$\text{Área de } R2 = \int_1^2 x^2-1dx\big|\ \big| = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 =$$

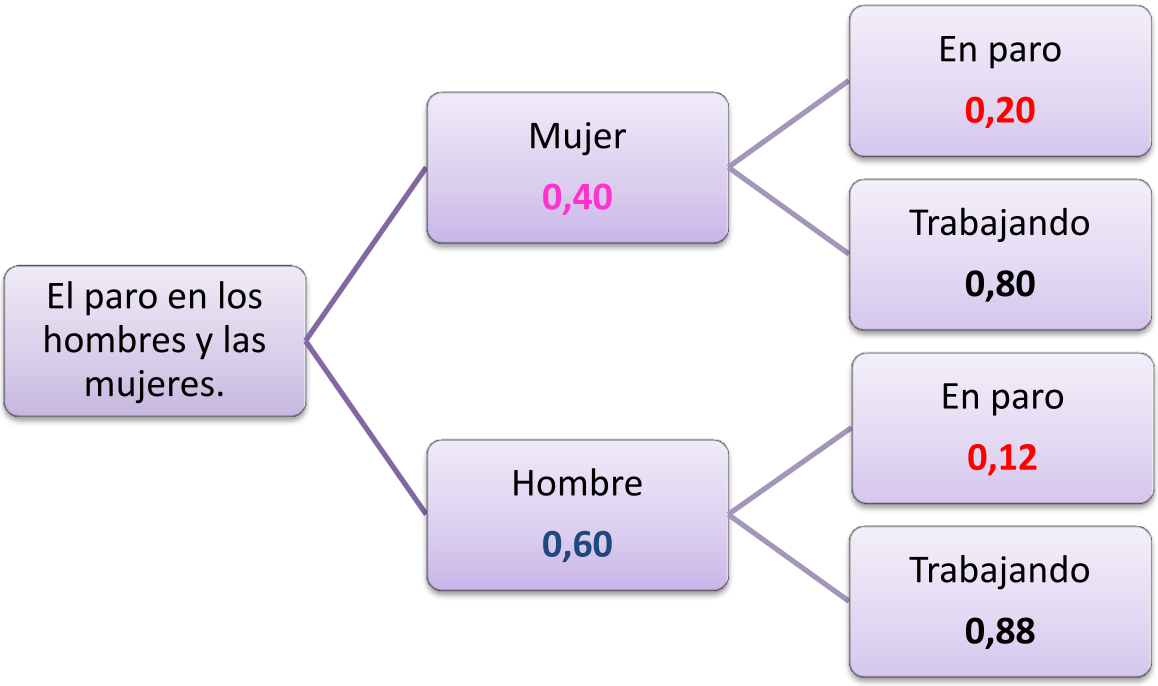
$$= \left[\frac{2^3}{3}-2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-1\right] = \left|\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right| = \frac{4}{3}u^2$$

$$\text{Área total} = \text{Área } R1 + \text{Área } R2 = \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = \boxed{2\,u^2}$$



**5.-** El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer. **(1 punto)**

Dibujamos un diagrama de árbol para aclarar la situación.




Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea mujer / Trabaja}) = \frac{P(\text{Sea mujer} \cap \text{Trabaje})}{P(\text{Trabaje})} =$$

$$= \frac{P(\text{Sea mujer})P(\text{Trabaje / Es mujer})}{P(\text{Sea mujer})P(\text{Trabaje / Es mujer}) + P(\text{Sea hombre})P(\text{Trabaje / Es hombre})} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,8}{0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,88} = \boxed{\frac{20}{53} = 0,377}$$