Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Asignatura: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro *a*. **(1,5 puntos)**

(b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2.- Sean los puntos A = (2, 0, 1), B = (2, 0, 3) y la recta *r* dada por el punto C = (1, 0, 2) y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 0)$. Determine los puntos *P* de la recta *r* para los cuales el área del triángulo ABP es 2.

(2,5 puntos)

3.- Sea la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0, \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)*. **(1 punto)**
(b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de *f(x)* y justifique si en el punto $x = 0$ la función *f(x)* tiene un mínimo relativo. **(1 punto)**
(c) Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2 - x^2$ y calcule su área.

(1,5 puntos)

4.- En un centro comercial el 35% de los clientes utiliza carro. El 70% de los que utilizan carro son hombres y el 40% de los no que no utilizan carro son mujeres.
(a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer. **(0,75 puntos)**
(b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, qué probabilidad hay de que utilice carro.

(0,75 puntos)

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1.- Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(a) Calcule la matriz X tal que $X = A^2 + B^2 - 2AB$. **(1 punto)**

(b) Halle la inversa de la matriz A. **(1,5 puntos)**

2.- Sean las rectas $r = \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-2}{4}$ y $s = \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases}$.

(a) Estudie la posición relativa de dichas rectas. **(1 punto)**

(b) Halle la distancia entre ambas rectas. **(1'5 puntos)**

3.- Sea la función $f(x) = x\ln(x)$ para *x > 0*.

(a) ¿Se puede definir *f(0)* para que *f(x)* sea continua por la derecha de *x = 0*? **(1 punto)**

(b) Estudie los máximos y mínimos relativos de *f(x)* para *x > 0*. **(0'5 puntos)**

(c) Halle, si existe, la recta tangente a *f(x)* en *x = 1*. **(0'5 puntos)**

(d) Calcule una primitiva *F(x)* de la función $f(x) = x\ln(x)$. **(1'5 puntos)**

4.- Se estima que en una partida de bombillas el 10% son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:

(a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa. **(0'5 puntos)**

(b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas. **(0'5 puntos)**

(c) la media y la desviación típica de la distribución. **(0'5 puntos)**

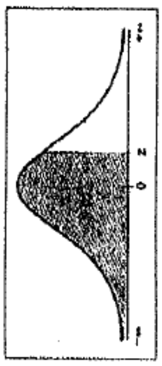
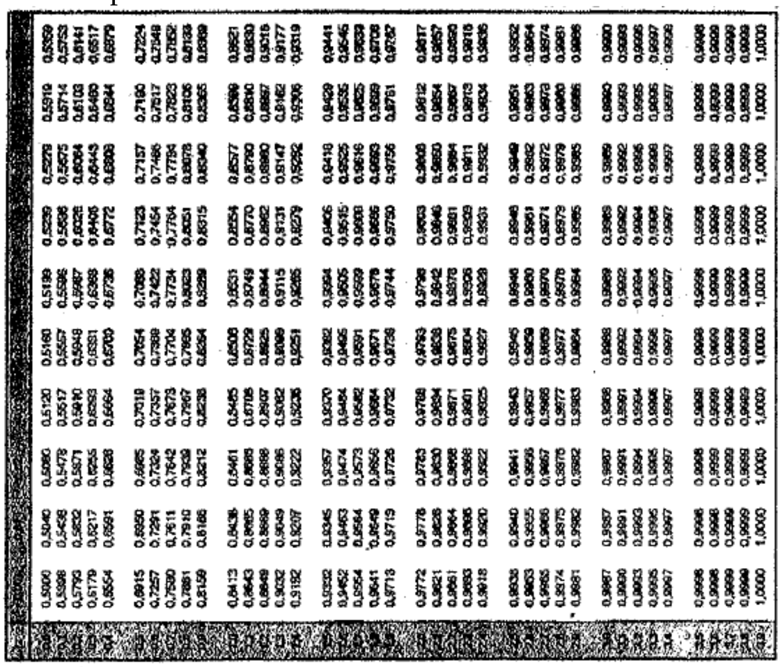


Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$



SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro *a*. **(1,5 puntos)**

(b) Para *a = 1* resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

(a) ¿El rango de A es 3?

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2a + a^2 - 0 - 0 - 0 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz tiene una fila todo ceros (2ª) y dos columnas iguales (2ª y 3ª). Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 2ª y la columna 2ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Si $a = 2$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Cambio columna 3ª por columna 1ª}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 2ª} - 2 \cdot \text{Fila 1ª} \\ 2 \quad 0 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \to \text{Nueva fila 2ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3ª} + \text{Fila 2ª} \\ 0 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de A es 2}$$

Resumiendo: Si $a \neq 0$ el rango de A es 3 y si $a = 0$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

(b) Hay que resolver el sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la inversa de A y la solución es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y calculamos la solución.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1-1 \\ 2-2-1 \\ -1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.- Sean los puntos A = (2, 0, 1), B = (2, 0, 3) y la recta *r* dada por el punto C = (1, 0, 2) y el vector $\vec{v}=(-1,0,0)$. Determine los puntos *P* de la recta *r* para los cuales el área del triángulo ABP es 2.

(2,5 puntos)

Obtenemos las ecuaciones de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} C(1,0,2)\in r \\ \vec{v}=(-1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow P(1-\lambda,0,2)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,0,3)-(2,0,1)=(0,0,2) \\ \overrightarrow{AP}=(1-\lambda,0,2)-(2,0,1)=(-1-\lambda,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -1-\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=2(-1-\lambda)\,j$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=(0,-2-2\lambda,0)$$

$$Área\ ABP=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-2-2\lambda)^2}}{2}=\begin{cases} =\dfrac{-2-2\lambda}{2}=-1-\lambda \\ =\dfrac{2+2\lambda}{2}=1+\lambda \end{cases}$$

Como nos piden que el área sea 2.

$$Área\ ABP=2\Rightarrow\begin{cases} -1-\lambda=2\Rightarrow-\lambda=3\Rightarrow\lambda=-3\rightarrow P(1-(-3),0,2)\Rightarrow\boxed{P(4,0,2)} \\ 1+\lambda=2\Rightarrow\lambda=1\rightarrow P'(1-1,0,2)\Rightarrow\boxed{P'(0,0,2)} \end{cases}$$

Existen dos puntos de la recta *r* que cumplen lo pedido: *P´(0, 0 ,2)* y *P(4, 0, 2)*

3.- Sea la función

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0, \\ -x & si \quad x<0. \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)*. **(1 punto)**
(b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de *f(x)* y justifique si en el punto *x = 0* la función *f(x)* tiene un mínimo relativo. **(1 punto)**
(c) Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x)=|x|$ y $g(x)=2-x^2$ y calcule su área. **(1,5 puntos)**

(a) Para que la función $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0, \\ -x & si \quad x<0. \end{cases}$ sea continua debe serlo en *x = 0*.

- Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{array}\right\}=0$
- Existe $f(0)=0$
- Son iguales $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

Se cumplen las tres condiciones, por lo que la función es continua.

La derivada en $\mathbb{R}-\{0\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0, \\ -1 & si \quad x<0. \end{cases}$

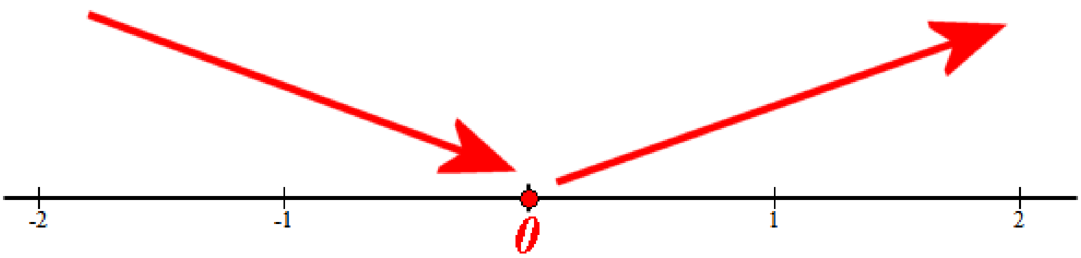
Por lo que las derivadas laterales en *x = 0* son $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=1 \end{array}\right\}$ y no existe la derivada en *x = 0*.

La función es continua en $\mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

(b) Utilizamos la derivada de la función $f'(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0, \\ -1 & si \quad x<0. \end{cases}$.

Esta derivada es negativa en $(-\infty,0)$ y por tanto la función decrece.

Esta derivada es positiva en $(0,+\infty)$ y por tanto la función crece.



La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.
La función presenta un mínimo relativo en *x = 0*.

(c) Averiguamos sus puntos de corte.

$f(x)=g(x)\Rightarrow |x|=2-x^2$

Hay dos posibilidades que estudiamos por separado.

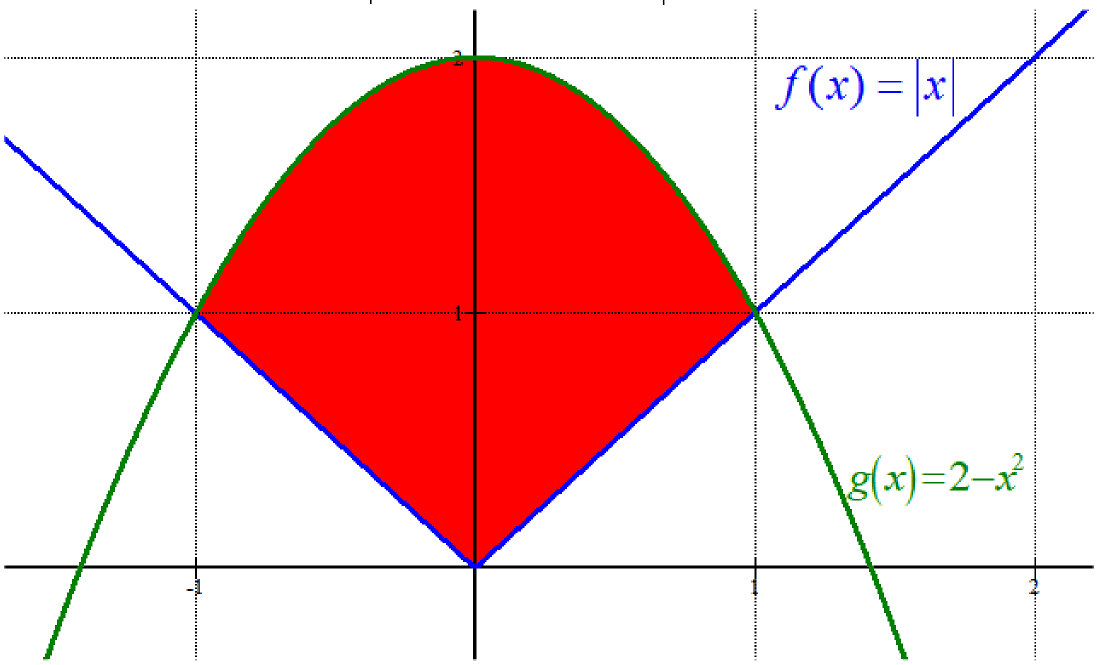
$$\Rightarrow \begin{cases} Si\ x>0 \rightarrow x=2-x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\begin{cases} =\dfrac{-1-3}{2}=-2\ No\ válido \\ =\dfrac{-1+3}{2}=1 \end{cases} \\ Si\ x<0 \rightarrow -x=2-x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\begin{cases} =\dfrac{1-3}{2}=-1 \\ =\dfrac{1+3}{2}=2\ No\ válido \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son en $x = -1$ y $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores de ambas funciones en el intervalo $(-1,1)$ y dibujamos el recinto.

x	$y=\lvert x\rvert$
-1	1
$-0,5$	$0,5$
0	0
$0,5$	$0,5$
1	1

x	$y=2-x^2$
-1	1
$-0,5$	$1,75$
0	2
$0,5$	$1,75$
1	1



Este recinto es simétrico por lo que basta calcular el área del recinto entre $x = 0$ y $x = 1$ y luego multiplicar lo obtenido por 2.

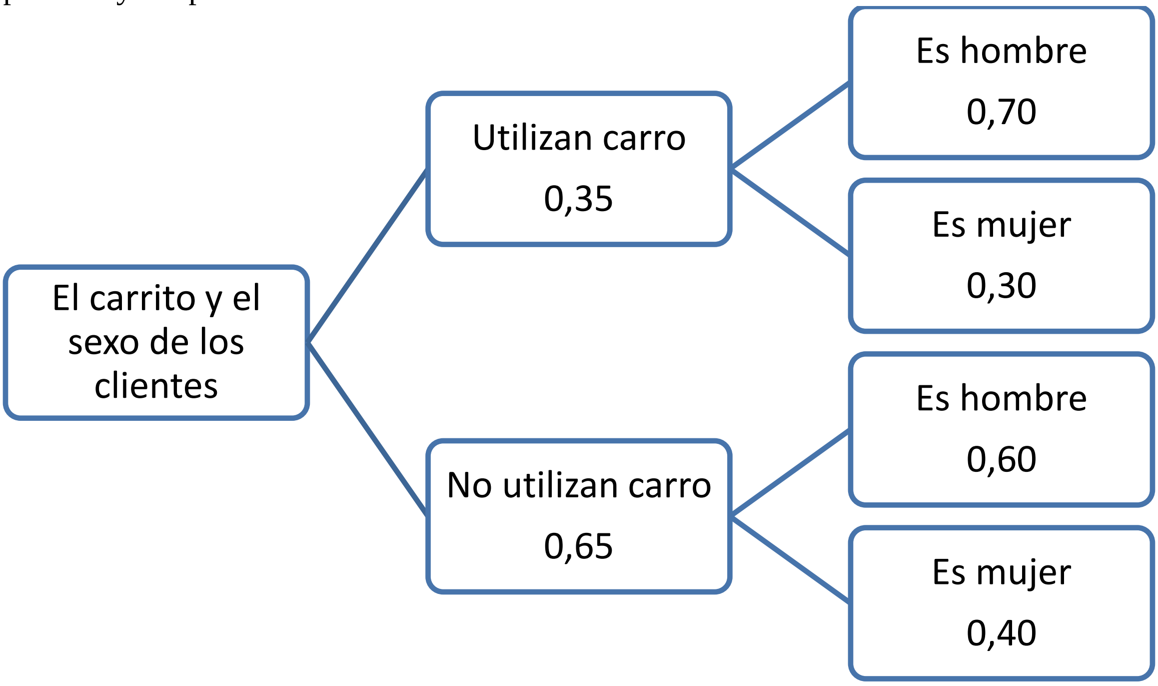
$$\int_0^1 2-x^2-xdx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[2-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right]-\left[0-\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}\right]=\frac{7}{6}$$

El área del recinto es $2\cdot\frac{7}{6}=\boxed{\frac{7}{3}=2,33\,u^2}$

Este valor del área concuerda con lo dibujado.

4.- En un centro comercial el 35% de los clientes utiliza carro. El 70% de los que utilizan carro son hombres y el 40% de los no que no utilizan carro son mujeres.
(a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer. **(0,75 puntos)**
(b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, qué probabilidad hay de que utilice carro. **(0,75 puntos)**

Este es un experimento compuesto, con el diagrama de árbol tendremos más claro los resultados posibles y sus probabilidades.



Respondemos a las preguntas.

(a)

$$P(\text{Sea mujer}) =$$
$$= P(\text{Utilice carro})P(\text{Sea mujer / Utiliza carro}) +$$
$$+P(\text{No utilice carro})P(\text{Sea mujer / No utiliza carro}) =$$
$$= 0,35 \cdot 0,30 + 0,65 \cdot 0,40 = 0,105 + 0,260 = \boxed{0,365}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori.

$$P(\text{Utilice carro / Ha sido hombre}) = \frac{P(\text{Utilice carro y sea hombre})}{P(\text{Sea hombre})} =$$
$$= \frac{P(\text{Utilice carro})P(\text{Sea hombre / Utiliza carro})}{1 - P(\text{Sea mujer})} = \frac{0,35 \cdot 0,7}{1 - 0,365} = \frac{49}{127} = \boxed{0,3858}$$

OPCIÓN B

1.- Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

(a) Calcule la matriz X tal que $X=A^2+B^2-2AB$. **(1 punto)**
(b) Halle la inversa de la matriz A. **(1,5 puntos)**

(a)

$$X=A^2+B^2-2AB$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&-1&2\\6&2&8\\-2&-3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&2\\4&4&6\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&0&4\\8&4&11\\-1&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&4\\8&8&12\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-4&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}}$$

(b)

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=2-2+2=2\neq 0$$

La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&0\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-2&1&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1/2&-1\\-1&1/2&0\\-1&1/2&1\end{pmatrix}}$$

2.- Sean las rectas $r \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$.

(a) Estudie la posición relativa de dichas rectas. **(1 punto)**
(b) Halle la distancia entre ambas rectas. **(1'5 puntos)**

(a) Obtenemos los vectores directores de las rectas y un punto de cada una de ellas.

$$r \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{4} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(3,5,2) \\ \overrightarrow{v_r}=(3,-1,4) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z+2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases} \Rightarrow 2y+2z+4+2y-z=4 \Rightarrow 4y+z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-4y} \Rightarrow \boxed{x=y-4y+2=2-3y} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2-3y \\ y=y \\ z=-4y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} P_s(2,0,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(-3,1,-4) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de ambas rectas son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(3,-1,4) \\ \overrightarrow{v_s}=(-3,1,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{-3}=\frac{-1}{1}=\frac{4}{-4}$$

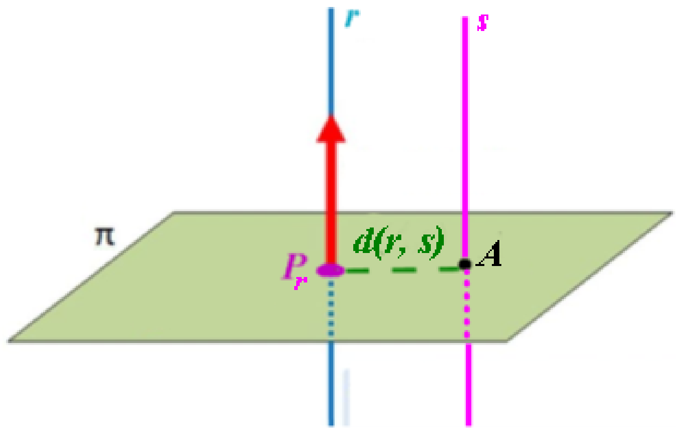
Las rectas son paralelas o coincidentes.

¿El punto $P_r(3,5,2)$ pertenece a la recta s?

$$\left.\begin{array}{l} P_r(3,5,2) \\ s \equiv \begin{cases} x=2-3y \\ y=y \\ z=-4y \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3=2-3y \\ 5=y \\ 2=-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=-3y \\ 5=y \\ 2=-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{3}=y \\ 5=y \\ \frac{2}{-4}=y \end{cases}$$ Salen valores diferentes.

El punto $P_r(3,5,2)$ no pertenece a la recta *s* y ambas rectas son paralelas.

(b) La distancia de la recta *r* a la recta *s* es la distancia del punto $P_r(3,5,2)$ a la recta *s*.



Hallamos el plano perpendicular a la recta *s* que pasa por el punto P_r.

El vector normal al plano es el director de la recta $\overrightarrow{v_s}=(-3,1,-4)$ por lo que el plano tiene ecuación $-3x+y-4z+D=0$. Como contiene el punto $P_r(3,5,2)$ entonces $-9+5-8+D=0 \Rightarrow D=12$.

El plano tiene ecuación $\pi: -3x+y-4z+12=0$.

Hallamos el punto A de corte entre recta *s* y plano π.

$$\left.\begin{array}{l} s=\begin{cases} x=2-3y \\ y=y \\ z=-4y \end{cases} \\ \pi: -3x+y-4z+12=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3(2-3y)+y-4(-4y)+12=0 \Rightarrow -6+9y+y+16y+12=0 \Rightarrow$$

$$26y=-6 \Rightarrow y=\frac{-6}{26}=\frac{-3}{13} \Rightarrow \begin{cases} x=2+\frac{9}{13}=\frac{35}{13} \\ y=\frac{-3}{13} \\ z=\frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{35}{13},\frac{-3}{13},\frac{12}{13}\right)$$

La distancia entre las rectas es la distancia del punto P_r a la recta *s* y, a su vez, es la distancia del punto A al punto P_r. Esta distancia se calcula con el módulo del vector que une dichos puntos.

$$d(r,s)=d(A,P_r)=\left|\overrightarrow{AP_r}\right|=\left|(3,5,2)-\left(\frac{35}{13},\frac{-3}{13},\frac{12}{13}\right)\right|=\left|\left(\frac{4}{13},\frac{68}{13},\frac{14}{13}\right)\right|= u$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2+\left(\frac{68}{13}\right)^2+\left(\frac{14}{13}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{4836}}{13}=5,34\,u}$$

3.- Sea la función $f(x) = xln(x)$ para $x > 0$.

(a) ¿Se puede definir $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua por la derecha de $x = 0$? **(1 punto)**

(b) Estudie los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ para $x > 0$. **(0'5 puntos)**

(c) Halle, si existe, la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. **(0'5 puntos)**

(d) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = xln(x)$. **(1'5 puntos)**

(a) Calculemos el límite de la función cuando x tiende a 0 por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xln(x) = 0\cdot(-\infty) = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} = \text{Indeterminación } (L\acute{}H\hat{o}pital) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Si definimos el valor de la función como $f(0) = 0$ es continua por la derecha de $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ xln(x) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(b) Usamos la derivada.

$$f(x) = xln(x) \Rightarrow f'(x) = ln(x) + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \underline{x = e^{-1}}$$

Sustituimos este valor crítico en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f''(x) = 0 + \frac{1}{x}$$

$$f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$$

La función tiene un mínimo relativo en $x = e^{-1}$.

(c)

$$\left.\begin{matrix} f(1) = ln(1) = 0 \\ f'(1) = 1 + \ln 1 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

(d)

$$F(x) = \int f(x)dx = \int xln(x)dx = \left\{\begin{matrix} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + K}$$

4.- Se estima que en una partida de bombillas el 10% son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:
(a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa. **(0'5 puntos)**
(b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas. **(0'5 puntos)**
(c) la media y la desviación típica de la distribución. **(0'5 puntos)**

X = Número de bombillas defectuosas de un lote de 6.
X es una distribución binomial donde se repite de forma independiente 6 veces el experimento y la probabilidad de éxito es 0,1. Llamamos éxito a "ser defectuosa la bombilla"

X = B(6, 0.1)

Podemos utilizar en el cálculo de probabilidades la fórmula:

$$P(X=k)=\binom{6}{k}0{,}1^k\cdot 0{,}9^{6-k} \quad \textit{Siendo } 0\le k\le 6$$

(a) $P(\text{Ninguna defectuosa})=P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}1^0\cdot 0{,}9^6=0{,}9^6=\boxed{0{,}5314}$

(b)

$$P(\text{Más de dos defectuosas})=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$$

$$=\binom{6}{3}0{,}1^3\cdot 0{,}9^3+\binom{6}{4}0{,}1^4\cdot 0{,}9^2+\binom{6}{5}0{,}1^5\cdot 0{,}9^1+\binom{6}{6}0{,}1^6\cdot 0{,}9^0=$$

$$=\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3\cdot 2}}0{,}1^3\cdot 0{,}9^3+\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3}}{\cancel{4\cdot 3}\cdot 2}0{,}1^4\cdot 0{,}9^2+\frac{6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}0{,}1^5\cdot 0{,}9+\frac{\cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}0{,}1^6=$$

$$=20\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^3+15\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^2+6\cdot 0{,}1^5\cdot 0{,}9+0{,}1^6=\boxed{0{,}01585}$$

(c) Es una variable de distribución binomial X = B(6, 0.1) y sus parámetros $n = 6$ y $p = 0.1$. También $q = 0.9$.
La media es $\mu=n\cdot p=6\cdot 0.1=\boxed{0.6}$
La desviación típica es $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{6\cdot 0.1\cdot 0.9}=\boxed{0.7348}$