UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

# Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad

**Curso 2016/2017**
**Convocatoria: Julio**
**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

## PROPUESTA A:

**1.- (2 puntos)** Sean *m* un número real y los vectores

$$\vec{u}=(1,0,1),\ \vec{v}=(2,-1,m).$$

(I) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(II) Determine, si existe, un valor de *m* tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45º con el vector $\vec{u}$.

**2.- (3 puntos)**

(I) Halle, según el valor del parámetro *a*, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

(II) Sean *A* y *B* dos matrices cuadradas de orden 4 tales que $det(AB) = 1$. ¿Qué se puede decir del rango de *A*?

**3.- (2 puntos)** En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería *A*, el 60 % va a la cafetería *B* y el 20 % va a ambas cafeterías.

(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería *A*, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería *B*.

(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería *A* ni a la cafetería *B*.

**4.- (3 puntos)** Sea $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real *x*, para la función *f* estudie:

(I) El dominio y las asíntotas.

(II) La monotonía y los extremos relativos.

(III) Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

## PROPUESTA B:

**1.- (2 puntos)** Sea *m* un número real y consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(I) Halle los valores de *m* para los que la matriz *A* tiene inversa.
(II) Determine el rango de *A* cuando *m* = 2.

**2.- (3 puntos)**
(I) Pruebe que cualquiera sea el valor de *a*, los planos $\pi_1 : ax+ay-z=0$, $\pi_2 : x-y+az=0$ se cortan en una recta *r*.
(II) Estudie, en función de *a*, la posición relativa de la recta *r* y el plano que contiene a los puntos A(1, 1, 1), B(l, 0, 2) y C(0, 1, 2a).

**3.- (2 puntos)** En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería *A*, el 60 % va a la cafetería *B* y el 20 % va a ambas cafeterías.
(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería *A*, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería *B*.
(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería *A* ni a la cafetería *B*.

**4.- (3 puntos)** Sea $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real *x*, para la función *f* estudie:
(I) El dominio y las asíntotas.
(II) La monotonía y los extremos relativos.
(III) Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

**Resuelto en la propuesta A.**

# SOLUCIONES

## PROPUESTA A:

**1.- (2 puntos)** Sean $m$ un número real y los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(2,-1,m)$.

(I) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(II) Determine, si existe, un valor de $m$ tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45º con el vector $\vec{u}$.

(I) Un vector perpendicular a ambos vectores es su producto vectorial.

$$\vec{p}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,0,1)\times(2,-1,m)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}=2j-k-mj+i=i+(2-m)j-k$$

$$\vec{p}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,2-m,-1)$$

Calculamos el módulo de este vector y el vector unitario en su misma dirección será este vector dividido por su módulo.

$$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{1^2+(2-m)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+4+m^2-4m+1}=\sqrt{m^2-4m+6}$$

Los vectores unitarios perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son:

$$\vec{w}=\frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2-4m+6}}=\left(\frac{1}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{2-m}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{-1}{\sqrt{m^2-4m+6}}\right)$$

Los vectores de módulo 3 perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que nos piden son:

$$3\vec{w}=\left(\frac{3}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{6-3m}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{-3}{\sqrt{m^2-4m+6}}\right)$$

Y también

$$-3\vec{w}=\left(\frac{-3}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{-6+3m}{\sqrt{m^2-4m+6}},\frac{3}{\sqrt{m^2-4m+6}}\right)$$

(II) Utilizamos el producto escalar de ambos vectores.

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{(1,0,1)(2,-1,m)}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{4+1+m^2}}=\frac{2+m}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+5}}$$

Como queremos que formen 45º y el coseno de este ángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\cos 45º=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+m}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+5}}\Rightarrow\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{m^2+5}=2(2+m)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m^2+5}=2(2+m)\Rightarrow\sqrt{m^2+5}=2+m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{m^2+5}\right)^2=(2+m)^2\Rightarrow m^2+5=4+m^2+4m\Rightarrow 1=4m\Rightarrow\boxed{m=\frac{1}{4}}$$

Para $m=\frac{1}{4}$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman 45º.

**2.- (3 puntos)**
(I) Halle, según el valor del parámetro *a*, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

(II) Sean *A* y *B* dos matrices cuadradas de orden 4 tales que *det(AB) = 1*. ¿Qué se puede decir del rango de *A?*

(I) La matriz tiene dimensión 4x3 por lo que su rango como máximo es 3.
Tomamos el menor de orden 3 formado por las 3 primeras filas y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2+0+9-1-6=0.$$

Cogemos ahora el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna (las tres primeras son linealmente dependientes) y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{vmatrix} = 9a+36-4+0-0-a-4-18=8a+10$$

$$8a+10=0 \Rightarrow a=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

**Situación 1ª**. $a \neq \frac{-5}{4}$

En esta situación el menor de orden 3 anterior tiene determinante no nulo y el rango de la matriz es 3.

**Situación 2ª.** $a=\frac{-5}{4}$

En esta situación el menor de orden 3 anterior tiene determinante nulo y el rango de la matriz no es 3.
Veamos si el rango es 2.
Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 3ª y las filas 3ª y 4ª, calculamos su determinante.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+3=4 \neq 0$. El rango es 2.

*(II)* Si $|AB|=1 \Rightarrow |A| \cdot |B|=1 \Rightarrow |A| \neq 0$
Como la matriz es de dimensión 4x4 su rango es 4 pues su determinante es no nulo.

**3.- (2 puntos)** En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería *A*, el 60 % va a la cafetería *B* y el 20 % va a ambas cafeterías.
(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería *A*, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería *B*.
(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería *A* ni a la cafetería *B*.

Realizamos una tabla de contingencia.

| | **Van a la cafetería B** | **No van a la cafetería B** | **TOTAL** |
|---|---|---|---|
| **Van a la cafetería A** | **20** | | **30** |
| **No van a la cafetería A** | | | |
| **TOTAL** | **60** | | **100** |

Termino de completar la tabla, teniendo en cuenta que cada línea debe sumar lo indicado en el total correspondiente.

| | **Van a la cafetería B** | **No van a la cafetería B** | **TOTAL** |
|---|---|---|---|
| **Van a la cafetería A** | **20** | **10** | **30** |
| **No van a la cafetería A** | **40** | **30** | **70** |
| **TOTAL** | **60** | **40** | **100** |

Respondemos a las preguntas planteadas haciendo uso de la tabla y la regla de Laplace.

(I)

$$P\left(\text{Vaya a la cafetería B / Va a la cafetería A}\right)=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}=\frac{20}{30}=\boxed{\frac{2}{3}=0,66}$$

(II)

$$P\left(\text{No vaya a la cafetería A ni a la B}\right)=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}=\frac{30}{100}=\boxed{\frac{3}{10}=0,3}$$

**4.- (3 puntos)** Sea $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x}$. Sabiendo que $e^x>x$ para todo número real *x*, para la función *f* estudie:

(I) El dominio y las asíntotas.

(II) La monotonía y los extremos relativos.

(III) Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

(I) El dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x} \Rightarrow e^x-x=0 \Rightarrow e^x=x$. Esto es imposible por lo aportado en el enunciado del problema ($e^x>x$). Por lo que $\text{Dominio}=\mathbb{R}$.

**Asíntota vertical.** $x=a$

No tiene, pues el dominio son todos los reales.

**Asíntota horizontal**. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

La asíntota horizontal en +∞ es $y=1$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}=\frac{e^{-\infty}-\infty}{e^{-\infty}+\infty}=\frac{0-\infty}{0+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

La asíntota horizontal en –∞ es $y=-1$

**Asíntota oblicua**. $y=mx+n$

No tiene, pues existen asíntotas horizontales en +∞ y en –∞.

(II) Utilizamos la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+x\right)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{e^xe^x-xe^x+e^x-x-\left(e^xe^x+xe^x-e^x-x\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{\cancel{e^xe^x}-xe^x+e^x-\cancel{x}-\cancel{e^xe^x}-xe^x+e^x+\cancel{x}}{\left(e^x-x\right)^2}$$

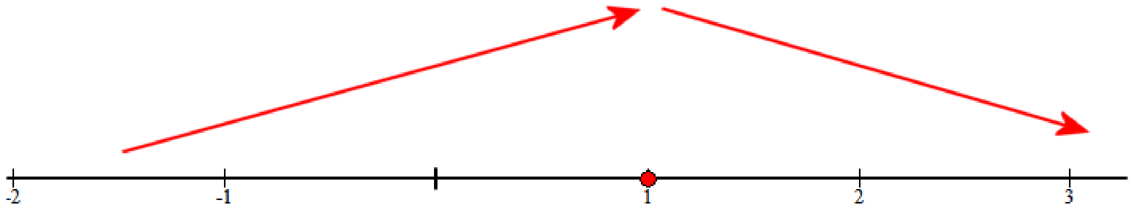
$$f\,'(x)=\frac{-2xe^x+2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{2e^x\left(-x+1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2e^x(-x+1)}{(e^x-x)^2}=0 \Rightarrow 2e^x(-x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^x=0 \to \text{¡Imposible!} \\ -x+1=0 \to x=1 \end{cases}$$

El único punto crítico de la función es $x = 1$.

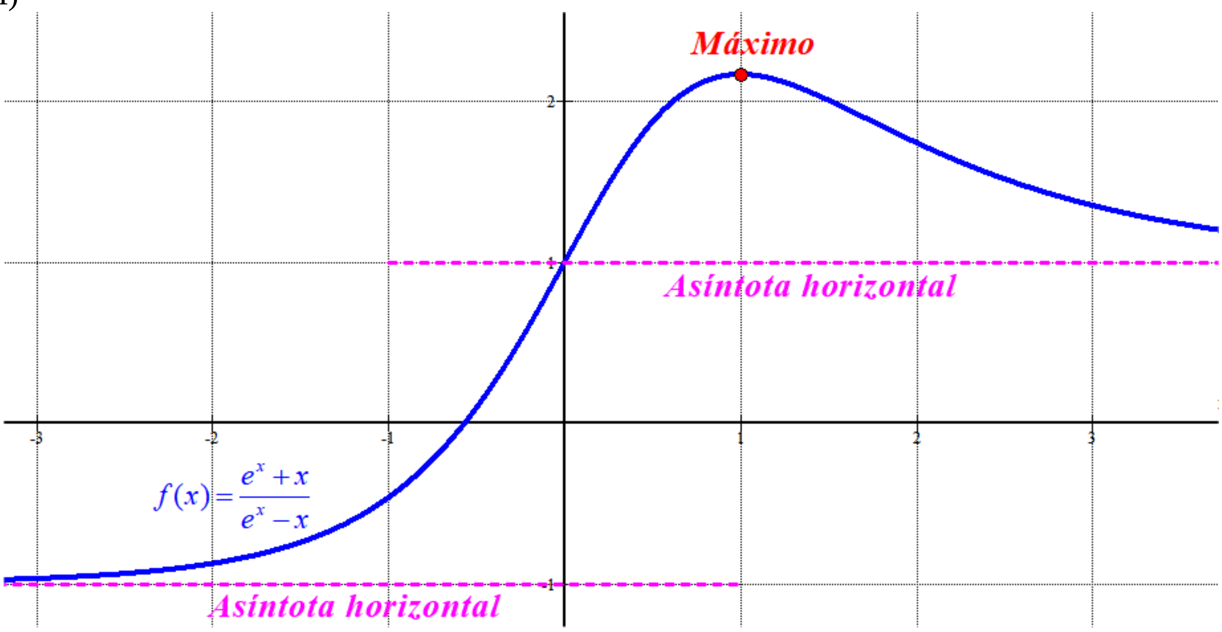
Vemos el signo de la derivada y la monotonía de la función antes y después de este valor.

- En $(-\infty,1)$ tomo $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{2e^0(-0+1)}{(e^0-0)^2}=\frac{2}{1}>0$. La función crece en $(-\infty,1)$
- En $(1,+\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{2e^2(-2+1)}{(e^2-2)^2}=\frac{-}{+}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.




La función presenta un máximo relativo en $x = 1$. Como $f(1)=\frac{e^1+1}{e^1-1}=\frac{e+1}{e-1}=2{,}16$ el máximo relativo tiene coordenadas (1, 2.16).
La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

(III)



# PROPUESTA B:

**1.- (2 puntos)** Sea *m* un número real y consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(I) Halle los valores de *m* para los que la matriz *A* tiene inversa.
(II) Determine el rango de *A* cuando *m* = 2.

(I) Depende del valor nulo o no del determinante de la matriz.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-m^2-0-0+4=-m^2+4$$

$$|A|=0\Rightarrow -m^2+4=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\sqrt{4}=\pm 2$$

La matriz A tiene inversa cuando $m\neq 2\ y\ m\neq -2$

(II) Si $m$ = 2 la matriz A queda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 3?

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-4+4=0$$. El rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Tomo el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila (proporcional a la 2ª) y la 1ª columna (proporcional a la 3ª) → $\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$.

El rango de A es 2.

**2.- (3 puntos)**
(I) Pruebe que cualquiera sea el valor de *a*, los planos $\pi_1 : ax+ay-z=0$, $\pi_2 : x-y+az=0$ se cortan en una recta *r*.
(II) Estudie, en función de *a*, la posición relativa de la recta *r* y el plano que contiene a los puntos A(1, 1, 1), B(1, 0, 2) y C(0, 1, 2a).

(I) Hay que comprobar que estos planos no son paralelos y por tanto se cortan en una recta. Basta probar que sus vectores normales no son paralelos, es decir, que sus coordenadas no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : ax+ay-z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(a,a,-1)\\ \pi_2 : x-y+az=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,-1,a)\end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{a}{1}=\frac{a}{-1}=\frac{-1}{a}?$$

Para que sea cierto debe cumplirse que:

$$\frac{a}{1}=\frac{-1}{a} \Rightarrow a\cdot a = 1\cdot 1 \Rightarrow a^2=-1 \Rightarrow a=\sqrt{-1} \quad ¡¡\text{Imposible!!}$$

Los vectores normales a los planos no tienen coordenadas proporcionales en ningún caso y los planos no son paralelos, independientemente del valor de *a*.

(II)
Averiguamos la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{r}A(1,1,\ 1)\in\pi_3\\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2)-(1,1,1)=(0,-1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(0,1,2a)-(1,1,1)=(-1,0,2a-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2a-1 \end{vmatrix}=0$$

$$(2a-1)(x-1)-(y-1)-(z-1)=0 \Rightarrow (2a-1)x-y-z-2a+1+1+1=0$$

$$\pi_3 \equiv (2a-1)x-y-z-2a+3=0$$

Averiguamos también el vector director de la recta *r* definida por los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : ax+ay-z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(a,a,-1)\\ \pi_2 : x-y+az=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,-1,a)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_r}=a^2 i-j-ak-ak-a^2 j-i=(a^2-1)i+(-a^2-1)j-2ak=(a^2-1,-a^2-1,-2a)$$

Plano y recta tienen 3 situaciones posibles: recta contenida en plano, recta paralela a plano y recta que corta a plano. Estas posiciones dependen de la relación entre vector normal al plano y el director de la recta.
Vamos a estudiar cuando el vector normal al plano $\pi_3$ obtenido previamente es ortogonal al vector director de la recta *r*, es decir, cuando su producto escalar es cero.

$$\pi_3 \equiv (2a-1)x - y - z - 2a + 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_3} = (2a-1,-1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{n_3} = (2a-1,-1,-1)\\ \overrightarrow{v_r} = \left(a^2-1,-a^2-1,-2a\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (2a-1,-1,-1)\left(a^2-1,-a^2-1,-2a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a-1)\left(a^2-1\right) + (-1)\left(-a^2-1\right) + (-1)(-2a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^3 - 2a - a^2 + 1 + a^2 + 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a^3 + 2 = 0 \Rightarrow a^3 + 1 = 0 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Para $a \neq -1$ vector normal y director no son ortogonales y plano y recta se cortan.

Para $a = -1$ vector normal y director son ortogonales y plano y recta son paralelos o coincidentes. Para distinguir cual de estas situaciones es la que ocurre en este caso comprobamos si un punto cualquiera de la recta pertenece al plano.

Determino un punto de la recta $r:\begin{cases}\pi_1 : -x-y-z=0\\ \pi_2 : x-y-z=0\end{cases}$ Tomo $x = y = 0$, tengo que:

$$\left.\begin{array}{r} r:\begin{cases}-x-y-z=0\\ x-y-z=0\end{cases}\\ x=0\\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}-0-0-z=0\\ 0-0-z=0\end{cases} \Rightarrow z = 0$$

. El punto P(0,0,0) pertenece a la recta *r*.

¿P(0,0,0) pertenece al plano $\pi_3 \equiv -3x - y - z + 5 = 0$? ¿$0-0-0+5=0$?

No pertenece y por tanto la recta no está contenida en el plano y es paralela al mismo.

**3.- (2 puntos)** En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería *A*, el 60 % va a la cafetería *B* y el 20 % va a ambas cafeterías.
(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería *A*, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería *B.*
(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería *A* ni a la cafetería *B.*

**Resuelto en la propuesta A.**

**4.- (3 puntos)** Sea $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real *x*, para la función *f* estudie:
(I) El dominio y las asíntotas.
(II) La monotonía y los extremos relativos.
(III) Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

**Resuelto en la propuesta A.**