UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad

Curso 2016/2017

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los puntos A(1,–1,0), B(2,2, 1**),** C(1,–2,–1), D(0,–1,2).

(I) Halle una ecuación de la recta que pasa por *A* y por *B*.

(II) ¿Son coplanarios los puntos A(1,–1,0), B(2,2, 1**),** C(1,–2,–1), D(0,–1,2)?

2.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} cx+3y-z&=-3,\\ x+cy+z&=c,\\ cx+y+z&=1. \end{aligned}$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro *c*.

(II) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x)=\left(8-x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:

(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

(I) Halle, si existe, A^{-1}.
(II) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial

$$A = AXA^{-1} + B$$

.

2.- (3 puntos) Dacios los vectores $\vec{u}=(2,-3,5)$, $\vec{v}=(1,2,-2)$, $\vec{w}=(2k,-1,k)$.
(I) Calcula el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes.
(II) Compruebe que para k = 2 los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.
(III) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}=(15,-11,18)$ respecto de la base del apartado anterior.

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.
(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo ele piscinas local.
(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x)=\left(8-x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:
(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.
(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.
(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los puntos A(1,–1,0), B(2,2, 1**),** C(1,–2,–1), D(0,–1,2).
(I) Halle una ecuación de la recta que pasa por *A* y por *B*.
(II) ¿Son coplanarios los puntos A(1,–1,0), B(2,2, 1**),** C(1,–2,–1), D(0,–1,2)?

(I) Determinamos su vector director y con punto y vector director establecemos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,-1,0)\in r \\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(2,2,1)-(1,-1,0)=(1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$$

(II) Comprobamos si los puntos A, b y C están alineados, comprobando si el punto C pertenece a la recta anterior que pasa por los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l} ¿C(1,-2,-1)\in r? \\ r:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{1-1}{1}=\frac{-2+1}{3}=\frac{-1}{1}? \Rightarrow ¿\frac{0}{1}=\frac{-1}{3}=\frac{-1}{1}? \text{ No se cumple}$$

Los tres puntos A, B y C no están alineados y por lo tanto definen un plano.

Hallo el plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,-1,0)\in \pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(1,-2,-1)-(1,-1,0)=(0,-1,-1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(2,2,1)-(1,-1,0)=(1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+1-y-1+0+z-0+3x-3=0 \Rightarrow \pi:2x-y+z-3=0$$

Compruebo si el punto D pertenece a este plano.

$$\left.\begin{array}{l} ¿D(0,-1,2)\in \pi? \\ \pi:2x-y+z-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0-(-1)+2-3=0? \Rightarrow \text{¡¡Si es cierto!!}$$

Los tres puntos A, B, C y D son coplanarios.

2.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones:

$$cx+3y-z=-3,$$
$$x+cy+z=c,$$
$$cx+y+z=1.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro *c*.
(II) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

(I) Tomamos la matriz de coeficientes

$$A=\begin{pmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A|=\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}=c^2+3c-1+c^2-3-c=2c^2+2c-4$$

Igualamos a cero:

$$|A|=0 \Rightarrow 2c^2+2c-4=0 \Rightarrow c^2+c-2=0 \Rightarrow c=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+3}{2}=1=c \\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=c \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $c \neq 1$ *y* $c \neq -2$

En este caso el determinante de A no vale cero y el rango de A es 3. También el rango de la matriz ampliada A/B es 3, así como el número de incógnitas.
El sistema es **compatible determinado (solución única)**

CASO 2. $c=-2$

El sistema y la matriz ampliada quedan

$$-2x+3y-z=-3,$$
$$x-2y+z=-2,$$
$$-2x+y+z=1.$$

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos el método de Gauss para triangular la matriz ampliada.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}} + \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -7 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila 2}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -7 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - 2\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}} \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad 2 \quad -2 \quad 14 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \to \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 18 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} \text{Rango de A es 2} \\ \text{Rango de A/B es 3} \end{array}\right\}$$

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B, por lo que el sistema es **incompatible (sin solución)**

CASO 3. $c=1$

El sistema y la matriz ampliada quedan

$$x+3y-z=-3,$$
$$x+y+z=1,$$
$$x+y+z=1.$$

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss para triangular la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - \text{Fila 2}^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila 2}^{\text{a}} - \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -3 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \to \text{Nueva fila 2}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} \text{Rango de A es 2} \\ \text{Rango de A/B es 2} \end{array}\right\}$$

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)**

Resumiendo: Si $c \neq 1 \; y \; c \neq -2$ el sistema es **compatible determinado**, si $c=-2$ el sistema es **incompatible** y si $c=1$ es **compatible indeterminado**.

b) El sistema es compatible determinado para $c \neq 1 \; y \; c \neq -2$ y compatible indeterminado para $c=1$.

Resolvemos para $c=1$**:**

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=-3, \\ x+y+z=1, \\ x+y+z=1. \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ iguales}\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y-z=-3, \\ x+y+z=1. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=-3, \\ x=1-y-z. \end{array}\right\} \Rightarrow 1-y-z+3y-z=-3 \Rightarrow 2y-2z=-4 \Rightarrow y-z=-2 \Rightarrow \boxed{y=-2+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-(-2+z)-z \Rightarrow \boxed{x=3-2z}$$

La solución es $x=3-2t;\ y=-2+t;\ z=t$

Resolvemos para $c \neq 1 \ y \ c \neq -2$**:**

Utilizamos el método de Cramer. $A=\begin{pmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} c & 3 & -1 & -3 \\ 1 & c & 1 & c \\ c & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ c & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-3c+3-c+c-3c+3}{2c^2+2c-4}=\frac{-6c+6}{2c^2+2c-4}=\frac{-6(c-1)}{2(c+2)(c-1)}=\frac{-3}{c+2}$$

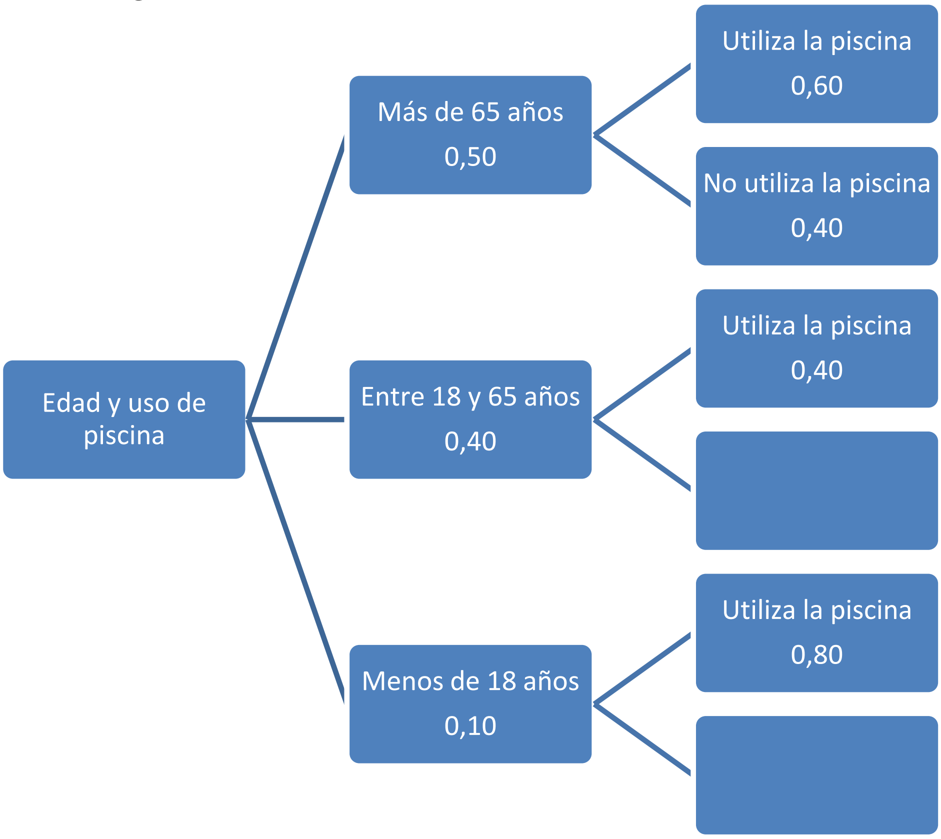
$$y=\frac{\begin{vmatrix} c & -3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{c^2-3c-1+c^2+3-c}{2c^2+2c-4}=\frac{2c^2-4c+2}{2c^2+2c-4}=\frac{2(c^2-2c+1)}{2(c^2+c-2)}=\frac{(c-1)(c-1)}{(c-1)(c+2)}=\frac{c-1}{c+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} c & 3 & -3 \\ 1 & c & c \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{c^2+3c^2-3+3c^2-3-c^2}{2c^2+2c-4}=\frac{6c^2-6}{2c^2+2c-4}=\frac{6(c^2-1)}{2(c^2+c-2)}=\frac{3(c-1)(c+1)}{(c-1)(c+2)}=\frac{3(c+1)}{c+2}$$

Las soluciones son $x=\dfrac{-3}{c+2};\quad y=\dfrac{c-1}{c+2};\quad z=\dfrac{3(c+1)}{c+2}$

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.
(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.
(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

Realizamos un diagrama de árbol



(I) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Utilice la piscina}) = P(\text{Tenga más de 65 años})P(\text{Utilice la piscina / Tiene más de 65 años}) +$$
$$+P(\text{Entre 18 y 65 años})P(\text{Utilice la piscina / Tiene entre 18 y 65 años}) +$$
$$+P(\text{Tenga menos de 18 años})P(\text{Utilice la piscina / Tiene menos de 18 años}) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,30 + 0,16 + 0,08 = \boxed{0,54}$$

(II) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Tenga más de 65 años / No utiliza la piscina}) =$$
$$= \frac{P(\text{Tenga más de 65 años y No utiliza la piscina})}{P(\text{No utiliza la piscina})} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{1-0,54} = \boxed{\frac{10}{23} = 0,434}$$

4.- (3 puntos) Sea la función $f\left(x\right)=\left(8-x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:

(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

(I)

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues no presenta ninguna dificultad, el exponente fraccionario representa una raíz cúbica que siempre existe y el radicando es un polinomio que no plantea ningún problema.

Por el mismo motivo es continua en todo $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. $x=a$

No existen asíntotas verticales

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(8-x^2\right)^{1/3}=-\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(8-x^2\right)^{1/3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-x^2\right)^{1/3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^{2/3}}{x}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(8-x^2\right)^{1/3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-x\right)=-\infty$$

No existen asíntotas oblicuas.

(II) La función es derivable y su derivada vale:

$$f\left(x\right)=\left(8-x^2\right)^{1/3}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(8-x^2\right)^{1/3-1}\left(-2x\right)=-\frac{2x}{3}\left(8-x^2\right)^{-2/3}=\frac{-2x}{3\left(8-x^2\right)^{2/3}}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{-2x}{3\left(8-x^2\right)^{2/3}}=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}}$$

La derivada existe salvo para los valores que anulan el denominador.

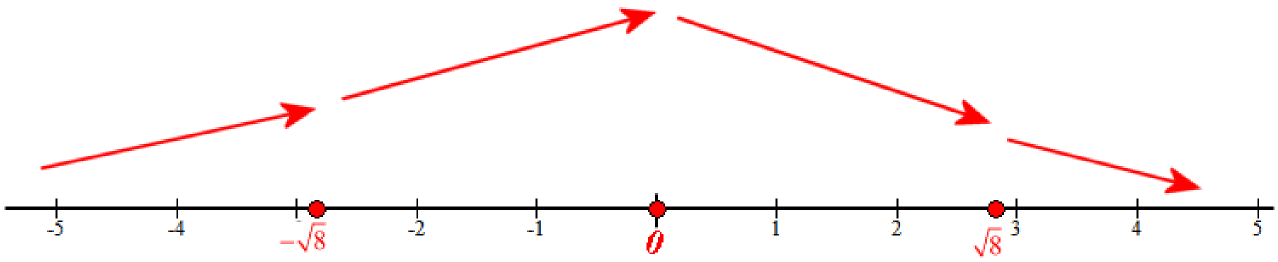
$$8-x^2=0\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

Localizamos los máximos y mínimos relativos.

$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow\frac{-2x}{3\left(8-x^2\right)^{2/3}}=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

Tenemos los valores $x=-\sqrt{8};\ x=0;\ x=+\sqrt{8}$ como puntos críticos.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4)=\dfrac{8}{3\sqrt[3]{\left(8-(-4)^2\right)^2}}>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)$.
- En $\left(-\sqrt{8},0\right)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{\left(8-(-2)^2\right)^2}}>0$. La función crece en $\left(-\sqrt{8},0\right)$
- En $\left(0,+\sqrt{8}\right)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{\left(8-2^2\right)^2}}<0$. La función decrece en $\left(0,+\sqrt{8}\right)$
- En $\left(\sqrt{8},+\infty\right)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\dfrac{-8}{3\left(8-4^2\right)^{2/3}}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{8},+\infty\right)$



La función tiene un máximo relativo en $x = 0$. $f(0)=\left(8-0^2\right)^{1/3}=2$.
El máximo relativo tiene coordenadas (0, 2)

La función crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$

(III) Utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{-2x}{3\left(8-x^2\right)^{2/3}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2\cdot 3\left(8-x^2\right)^{2/3}-(-2x)\left(3\frac{2}{3}\left(8-x^2\right)^{2/3-1}(-2x)\right)}{\left(3\left(8-x^2\right)^{2/3}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-6\left(8-x^2\right)^{2/3}-8x^2\left(8-x^2\right)^{-1/3}}{9\left(8-x^2\right)^{4/3}}=\frac{-6\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}-\dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{8-x^2}}}{9\left(8-x^2\right)^{4/3}}$$

$$f''(x)=\frac{\dfrac{-6\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}\sqrt[3]{8-x^2}-8x^2}{\sqrt[3]{8-x^2}}}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^4}}=\frac{-6\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}\sqrt[3]{8-x^2}-8x^2}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^4}\sqrt[3]{8-x^2}}=\frac{-6\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^3}-8x^2}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^5}}$$

$$f''(x)=\frac{-6\left(8-x^2\right)-8x^2}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^5}}=\frac{-48+6x^2-8x^2}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^5}}=\frac{-48-2x^2}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^5}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{-48-2x^2}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^5}}=0\Rightarrow -48-2x^2=0\Rightarrow 2x^2=-48\Rightarrow x=\sqrt{-29}=\text{No existe}$$

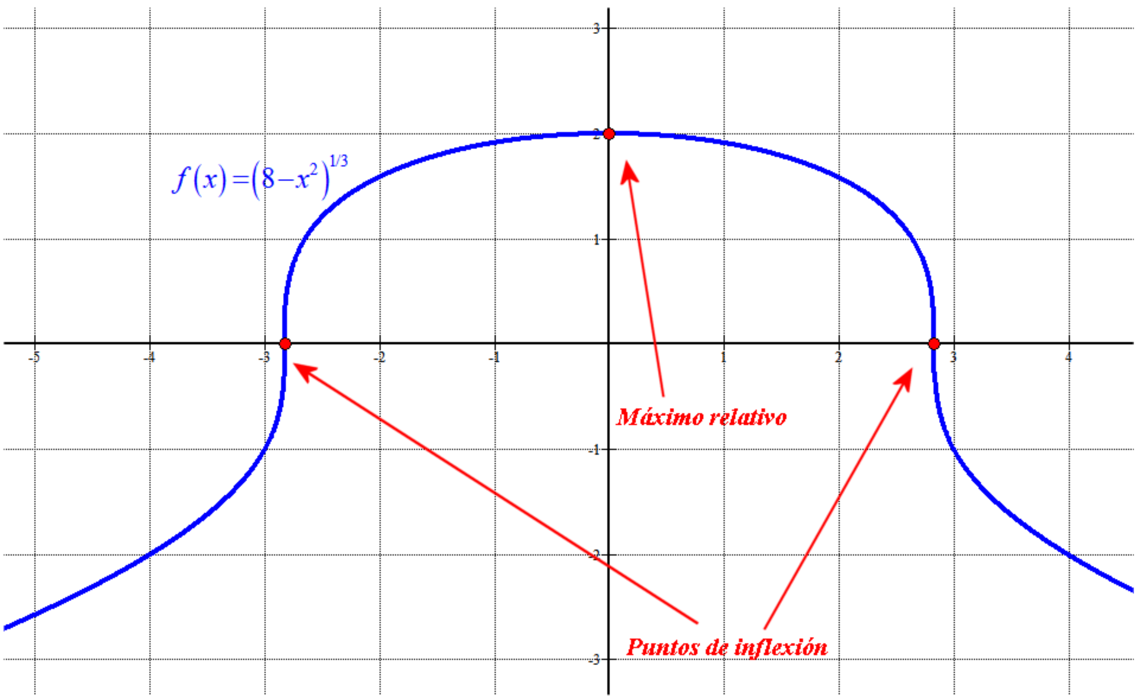
No existe un punto de inflexión obtenido a partir de la derivada segunda, pero como la derivada primera no existe para $x=-\sqrt{8};\ x=+\sqrt{8}$ estudiamos que ocurre con el signo de la derivada segunda (curvatura) antes, entre y después de estos valores.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)$ tomo $x = -4$ y la derivada segunda vale $f''(-4)=\frac{-48-32}{9\sqrt[3]{(8-16)^5}}=\frac{-}{-}>0$.

  La función es convexa (∪) en $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)$.
- En $\left(-\sqrt{8},+\sqrt{8}\right)$ tomo $x = 0$ y la derivada vale $f''(0)=\frac{-48}{9\sqrt[3]{(8)^5}}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\sqrt{8},+\sqrt{8}\right)$.
- En $\left(\sqrt{8},+\infty\right)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f''(4)=\frac{-48-32}{9\sqrt[3]{(8-16)^5}}=\frac{-}{-}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(\sqrt{8},+\infty\right)$.

La función es convexa (∪) en $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(\sqrt{8},+\infty\right)$ y cóncava (∩) en $\left(-\sqrt{8},+\sqrt{8}\right)$.

Los puntos de inflexión están en $x=-\sqrt{8};\ x=+\sqrt{8}$



PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

(I) Halle, si existe, A^{-1}.
(II) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial

$$A=AXA^{-1}+B$$

(I)

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-5=1\neq 0$$

La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

(II) Despejamos de la ecuación matricial la matriz X.

$$A=AXA^{-1}+B\Rightarrow A-B=AXA^{-1}\Rightarrow A^{-1}\left(A-B\right)A=X$$

Sustituimos los valores de cada una de las matrices y realizamos las operaciones indicadas.

$$X=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}4+5 & 8\\ -2-3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}9 & 8\\ -5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}27+8 & 45+16\\ -15-4 & -25-8\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}35 & 61\\ -19 & -33\end{pmatrix}$$

2.- (3 puntos) Dacios los vectores $\vec{u}=(2,-3,5)$, $\vec{v}=(1,2,-2)$, $\vec{w}=(2k,-1,k)$.

(I) Calcula el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes.
(II) Compruebe que para k = 2 los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.
(III) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}=(15,-11,18)$ respecto de la base del apartado anterior.

(I) Para que los vectores sean linealmente dependientes debe ser su determinante nulo.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 2 & -2\\ 2k & -1 & k\end{vmatrix}=4k+12k-5-20k+3k-4=-k-9$$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0\Rightarrow -k-9=0\Rightarrow \boxed{k=-9}$$

(II) Para que sean una base deben ser linealmente independientes. Lo son, pues para *k = 2* su producto mixto es no nulo.

$$\vec{u}=(2,-3,5),\vec{v}=(1,2,-2),\vec{w}=(4,-1,2)$$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 2 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-11\neq 0$$

(III)

$$\vec{a}=(15,-11,18)=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$$

$$(15,-11,18)=x(2,-3,5)+y(1,2,-2)+z(4,-1,2)$$

$$(15,-11,18)=(2x+y+4z,-3x+2y-z,5x-2y+2z)\Rightarrow\begin{cases}15=2x+y+4z\\ -11=-3x+2y-z\\ 18=5x-2y+2z\end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r}2x+y+4z=15\\ -3x+2y-z=-11\\ 5x-2y+2z=18\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cdot\text{Ecuación 2ª}+3\cdot\text{Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}-6x & +4y & -2z & =-22\\ 6x & +3y & +12z & =45\\ \hline 0 & 7y & +10z & =23\end{array}\to\text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\cdot\text{Ecuación 3ª}-5\cdot\text{Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}10x & -4y & +4z & =36\\ -10x & -5y & -20z & =-75\\ \hline 0 & -9y & -16z & =-39\end{array}\to\text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+y+4z=15\\ 7y+10z=23\\ -9y-16z=-39\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}7\cdot\text{Ecuación 3ª}+9\cdot\text{Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrrr}0 & -63y & -112z & =-273\\ 0 & 63y & +90z & =207\\ \hline 0 & 0 & -22z & =-66\end{array}\to\text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+4z=15 \\ 7y+10z=23 \\ -22z=-66 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-66}{-22} \Rightarrow \boxed{z=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7y+10z=23 \\ z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 7y+30=23 \Rightarrow 7y=-7 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+4z=15 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-1+12=15 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Las coordenadas del vector $\vec{a}=(15,-11,18)$ en la base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son $\vec{a}=(2,-1,3)$

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.
(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo ele piscinas local.
(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

Resuelto en la propuesta A

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x)=\left(8-x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:
(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.
(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.
(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

Resuelto en la propuesta A