

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, donde \ln denota el logaritmo neperiano.

Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

- a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$.
- b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x) dx$

Solución

a) La función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, tiene problemas en el denominador, cuando $x=0$ y el $\ln x$, cuando $x \leq 0$, por tanto, $\text{Dom } f = (0, \infty)$

Derivada de la función: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$

Igualando a cero para buscar los posibles extremos, y dado que $x > 0$:

$$1 - 2 \ln x = 0 \rightarrow 1 = 2 \ln x \rightarrow \ln x = 1/2 \rightarrow x = e^{1/2}$$

Comprobamos los signos de la derivada:

Crece: $(0, e^{1/2})$

Decrece: $(e^{1/2}, \infty)$

$x < e^{1/2}$	$x > e^{1/2}$	
+	-	Signo f'
Crece	Decrece	Interpretación f

Hay un máximo en $x = e^{1/2}$ $y = \frac{\ln e^{1/2}}{(e^{1/2})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$

Máximo $(e^{1/2}, \frac{1}{2e})$

Otra forma

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento también se podría haber hallado la segunda derivada, indicando en cualquier caso los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f''(x) = \frac{-2x^3 - 3x^2(1 - 2 \ln x)}{x^6} = \frac{-5x^2 + 6x^2 \cdot \ln x}{x^6} \rightarrow f''(e^{1/2}) = \frac{-5e + 3e}{e^3} = \frac{-2}{e^2} < 0 \rightarrow \text{Máximo } (e^{1/2}, \frac{1}{2e})$$

Crece: $(0, e^{1/2})$

Decrece: $(e^{1/2}, \infty)$

$$b) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Se calculará la integral indefinida por partes:

$$\text{Llamamos } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Luego, aplicando la fórmula de integración por partes, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$ y sustituyendo en ella obtenemos:

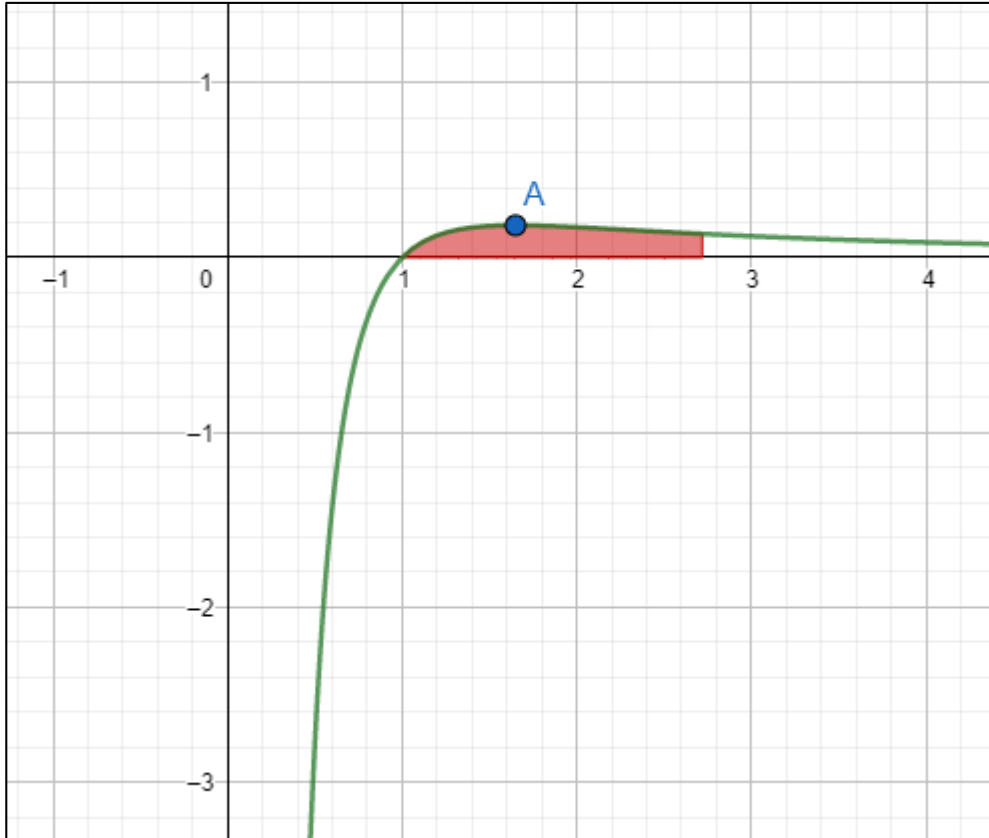
$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

Entonces aplicando teorema fundamental del cálculo: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

En nuestro caso, los límites de integración tenemos:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e} = 0.264$$

Representación de función, punto máximo recinto de área (no solicitados):



2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

- Halla los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.
- Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A , calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la identidad de orden 3

Solución

a. $|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-1)(k-3) - k(k-1) - k(k-1)$

$$k(k-1)[k-3-1-1] = k(k-1)(k-5)$$

Para que tenga inversa tiene que ocurrir que k no tome los valores 0, 1 o 5.

b.

$$A \cdot X = 24 \cdot I_3 \rightarrow X = 24 \cdot A^{-1} \cdot I_3 = 24 \cdot A^{-1}$$

Por tanto, debemos buscar la matriz inversa de A

Sustituimos el valor de k por -1:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo realizado en el ejercicio anterior, para $k = -1$, existe la matriz inversa de A , y además:

$$|A| = k(k-1)(k-5) = (-1)(-2)(-6) = -12$$

Si no ha resuelto el apartado anterior, puede resolver el determinante de A , cuando $k=-1$, y obtiene 12. Calculemos A^{-1} :

$$\left. \begin{array}{l} A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow Adj(A)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces: $X = 24 \cdot A^{-1} = 24 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t = 24 \cdot \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot$

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 2 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$

- Estudiar la posición relativa de r y s .
- Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r , y que contiene el punto $A(11, -2, 5)$

Solución

a.

Punto de la recta r , para $y = 0$; $P(7, 0, 3)$

Vector director de r $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k \rightarrow v_r = (2, -1, 1)$

Punto de la recta s , $Q(2, -5, 0)$

Vector director de s $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k \rightarrow v_s = (0, 0, 1)$

Con un punto de la recta r , (para $y = 0$); $P(7, 0, 3)$ y otro punto de la recta s , $Q(2, -5, 0)$, hallamos el vector $\vec{QP} = (5, 5, 3)$ y comprobamos que forman un sistema de vectores linealmente independientes,

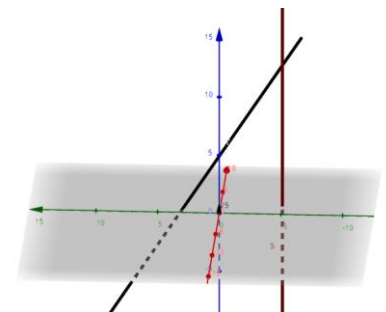
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \text{ Concluimos que las rectas se cruzan}$$

Otra forma:

$$r \cap s \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \\ x = 2 \\ y = -5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Rang(A) = 3 pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Rang(A/b) = 4 pues $|A/b| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$



Teorema de Rouché-Frobenius:

$\text{Rang}(A) = 3 \neq \text{Rang}(A/b) = 4 \Rightarrow$ sistema incompatible, las rectas se cruzan.

b) Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por punto A (11,-2,5)

Sea el plano π perpendicular a la recta r , entonces el vector normal al plano π viene dado por el vector director de la recta r

Hallamos el vector director de la recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k \rightarrow v_r = (2, -1, 1)$$

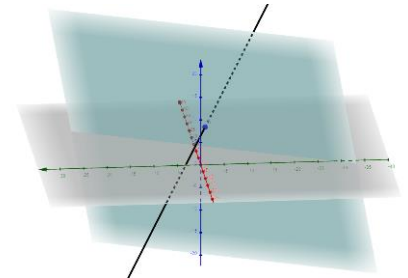
Ecuación del plano π que pasa por el punto (11,-2,5) es,

$$2x - y + z + d = 0$$

$$2 \cdot 11 + 2 + 5 + d = 0$$

$$d = -29$$

$$2x - y + z - 29 = 0$$



4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.
- ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento?
 - ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso?

Solución

Se define la variable normal X : "tiempo en horas hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta"

$$X \sim N(1500, 200)$$

a.

$$P(X < 1000) = P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) = P(Z < -2.5) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \leq 2.5)$$

$$P(X < 1000) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Fallarán un 0.62% de las impresoras antes de 1000 horas de funcionamiento.

$$b) P(1000 < X < 2000) = P\left(\frac{1000 - 1500}{200} < Z < \frac{2000 - 1500}{200}\right) = P(-2.5 < Z < 2.5) = 0.9876$$

El 98.7% de las impresoras tendrá su primera avería entre 1000 y 2000 horas.

GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.
- a. Calcule los valores a , b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes:
- Se corten en el punto $P(1,1)$
 - En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.
- Dar las expresiones de las funciones resultantes.
- b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función:

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$

Solución:

a. Si son tangentes en el punto $P(1,1)$, las gráficas deben pasar por dicho punto, es decir:

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + 2 = 1 \Rightarrow \mathbf{a + b = -1} \quad (I)$$

$$g(1) = 1 \Rightarrow c - 2 = 1 \Rightarrow \mathbf{c = 3}$$

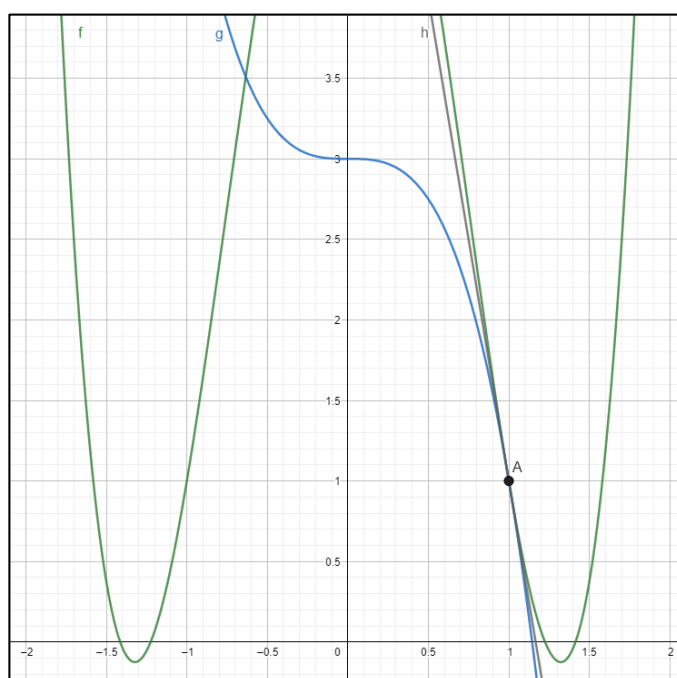
Como además son tangentes en P, deben coincidir las derivadas primeras de ambas funciones en dicho punto, esto es: $f'(1) = g'(1)$.

Las derivadas de ambas funciones serán: $f'(x) = 8x^3 + 2ax$ y $g'(x) = -6x^2$.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} f'(1) = 2a + 8 \\ g'(1) = -6 \end{cases} \Rightarrow 2a + 8 = -6 \Rightarrow \mathbf{a = -\frac{14}{2} = -7}$$

y sustituyendo b en (I), obtenemos: $\mathbf{b = 6}$

Con lo que las funciones serán: $\mathbf{f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6}$ y $\mathbf{g(x) = -2x^3 + 3}$



b.

$$\text{Para } a = b = 1, \text{ la función será: } h(x) = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Asíntotas Verticales

Se determina para qué valores se anula el denominador.

$$x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x): \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntota Vertical en $x = 1$.

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = -\infty$$

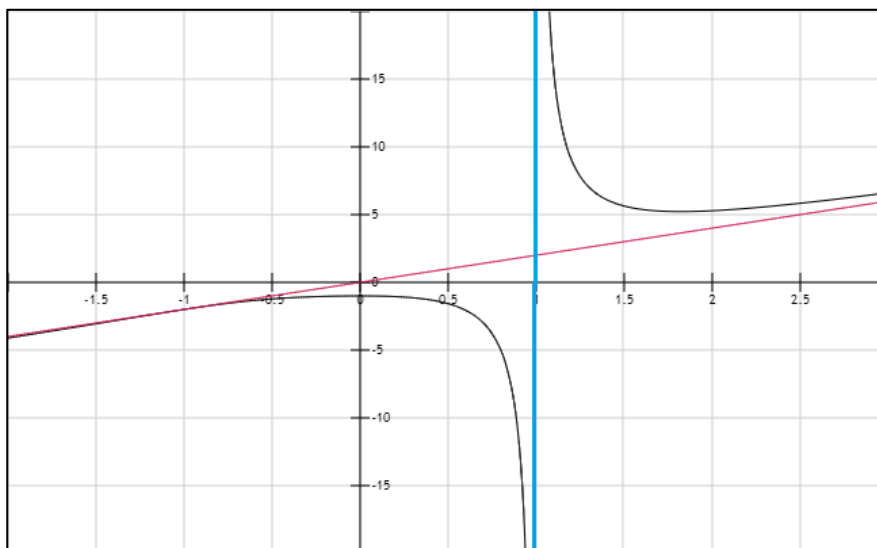
No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}}{x} = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1 - 2x^4 + 2x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = 0$$

Existe una asíntota oblicua dada por la recta $y = 2x$.



2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Solución

Definimos las variables

x: "número cajas de bombones"

y: "número tabletas de chocolate"

z: "número paquetes de chocolate en polvo"

Se quieren fabricar un total de 12 unidades de los tres productos $x + y + z = 12$

Requerimientos de chocolate por producto para 24 kg, $2x + 4y + z = 24$

Requerimientos de leche por producto para 60 lt en almacén, $6x + 4y + 4z = 60$

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{cases}$$

Opción 1. Se aplica el método de Cramer: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 8 + 6 - (24 + 4 + 8) = -6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 24 & 4 & 1 \\ 60 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{192 + 96 + 60 - (240 + 48 + 96)}{16 + 8 + 6 - (24 + 4 + 8)} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 24 & 1 \\ 6 & 60 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{96 + 120 + 72 - (144 + 60 + 96)}{16 + 8 + 6 - (24 + 4 + 8)} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 24 \\ 6 & 4 & 60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{240 + 96 + 144 - (288 + 96 + 120)}{16 + 8 + 6 - (24 + 4 + 8)} = \frac{-24}{-6} = 4$$

Se fabricarán 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

Opción 2. Por Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ -2y - 2z = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ -3z = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Se fabricarán 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$
- Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1 .
 - Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 , averigüe el punto de intersección.

Solución

a.

Para determinar la ecuación del plano π_2 , necesitamos dos vectores y un punto.

Si el plano π_1 es perpendicular al plano π_2 , los vectores normales a π_1 **son directores del plano** π_2 que buscamos.

$\pi_1 \equiv x - y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \vec{w} = (1, -1, 3)$ es normal a π_1 .

Entonces el vector \vec{w} es director del plano π_2 .

El vector director se consigue mediante $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 3)$

Como r está en el plano, el vector director de la recta es uno de los vectores directores del plano.

Considerando un punto P de la recta, que pertenecerá al plano. Haciendo $x=1$, $y=-3$, $z=1$ será un punto $P(1, -3, 1)$

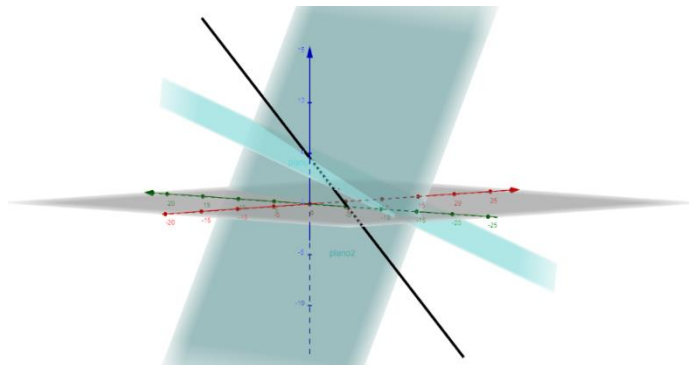
La ecuación general será:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} P(1, -3, 1) \\ \vec{w} = (1, -1, 3) \\ \vec{u} = (4, 8, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3x + 3 + 8z - 8 + 12y + 36 + 4z - 4 - 24x + 24 - 3y - 9 = 0$$

$$-27x + 9y + 12z + 42 = 0$$

Entonces la ecuación del plano $\pi_2 \equiv -9x + 3y + 4z + 14 = 0$



b.

Buscamos un punto y un vector de la recta r:

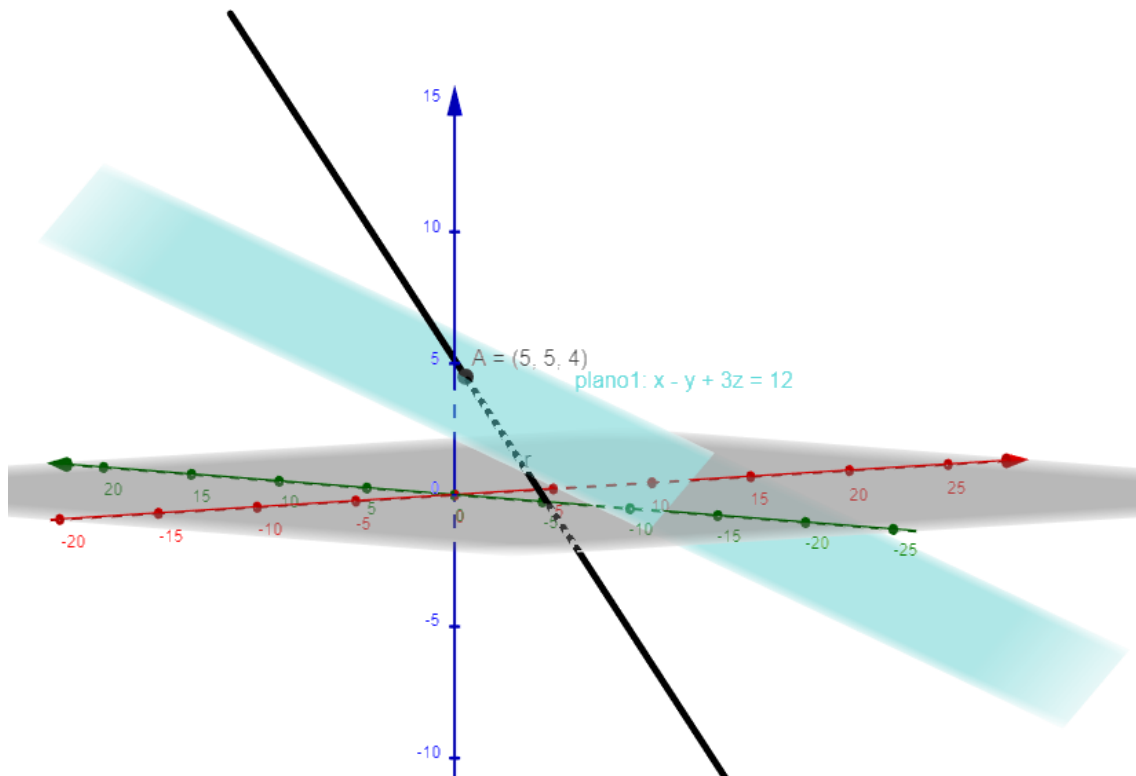
El vector director los conseguimos con $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 3)$

Considerando un punto P de la recta. Haciendo $x=1$, $y=-3$, $z=1$ será un punto P (1, -3, 1)

Por tanto, podemos escribir la recta como los puntos que verifican:
 $X=1+4\lambda$; $y=-3+8\lambda$; $z=1+3\lambda$

Sustituimos en la ecuación del plano para obtener λ , que nos dará el punto de corte:
 $1+4\lambda-(-3+8\lambda)+3(1+3\lambda) = 7+5\lambda = 12$; $\lambda = 1$

Punto de corte: (5, 5, 4)



4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
- Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.
 - Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.
 - Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8

Solución

a.

Se define la variable $X =$ “número de resultados inexactos en los $n = 10$ análisis de níquel realizados”

Eventos independientes

$$X \sim B(n, p) = B(10, 0.08)$$

“éxito”= que el análisis sea inexacto $p = 0.08$, $q = 1 - p = 0.92$

a) Cuál es la probabilidad de que más de 2 de los 10 sean erróneos.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{10}{0} p^0 q^{10} + \binom{10}{1} p q^9 + \binom{10}{2} p^2 q^8 =$$

$$= \frac{10!}{0!10!} (0.08)^0 (0.92)^{10} + \frac{10!}{1!9!} (0.08) (0.92)^9 + \frac{10!}{2!8!} (0.08)^2 (0.92)^8 = 0.9599$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$P(X > 2) = 1 - (0.434 + 0.377 + 0.1478) = 1 - 0.9588 = 0.0412$$

Existe un 4.12% de probabilidades de que se decida descartar este método de determinación de níquel en aleación de acero.

No es cierto. Hay más de un 3%

b.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 q^{10-3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} (0.08)^3 (0.92)^7 = 0.03427$$

Existe un 3.42% de probabilidad de que 3 de los 10 análisis sean erróneos.

No es cierto. Hay más de 3%

c.

Hallamos la esperanza matemática: $E[X] = \mu = np = 10(0.08) = 0.8$

Aproximadamente se espera unos 0.8 análisis exactos realizados. **Por lo que la afirmación no es cierta.**