



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

- [1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
- [1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- [0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

A.2:

- [1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.
- [1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

A.3: Los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C .

- [0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C .
- [0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π .
- [1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

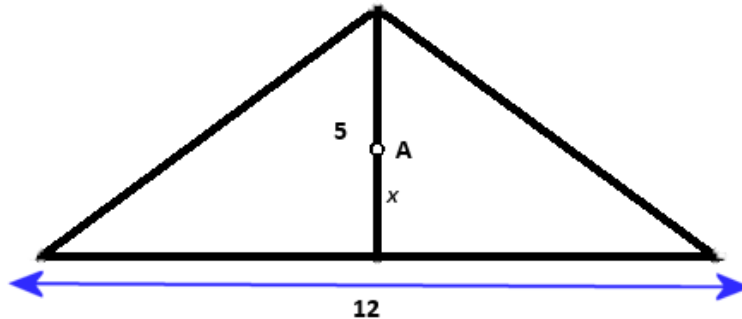
- [1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
- [1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .
- [0,5 p.] Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
- [1 p.] Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



- [0,5 p.] Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$
- [1,5 p.] Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
- [0,5 p.] Calcule dicha cantidad mínima.

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

- [1 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.
- [1,5 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la

probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

- [1 p.] Sin saber donde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.
- [1,5 p.] Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

SOLUCIONES

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
- b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

a)

Discutamos el sistema $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$

Para ello consideremos su matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - (a^3 + 1 + 1) = -a^3 + 3a - 2$$

Si igualamos a cero:

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0$$

Resolviendo por Ruffini:

$$1 \begin{array}{r|rrrr} -1 & 0 & 3 & -2 \\ & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow a = 1 \text{ es raíz}$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado restante:

$$-a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1) \cdot 2}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2}$$

$$a = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = -2 \\ \frac{1-3}{-2} = 1 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores especiales para el parámetro a . Hay tres casos diferentes:

CASO 1. $a \neq 1; a \neq -2$

En este caso el determinante es no nulo y el sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, pues la ecuación 1ª y la ecuación 3ª no pueden cumplirse al mismo tiempo.

CASO 3. $a = -2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Aplicando Gauss y sumando a la ecuación 2ª la 1ª multiplicada por -1 . Y a la 3ª le sumamos la 1ª multiplicada por 2:

$$\begin{array}{rcl} x & -2y & +z & = & -2 \\ -x & -y & +2z & = & -1 \\ \hline & -3y & 3z & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -2x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & 2y & -4z & = & 2 \\ \hline & 3y & -3z & = & 3 \end{array}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

La 2ª y 3ª ecuación son iguales. Este sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

En particular, para $a = 0$ el sistema es compatible determinado y queda

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Que resolviéndolo sale:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = -z \Rightarrow \begin{cases} -z + y = 1 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 1 + z \Rightarrow 1 + z + z = 3 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1$$

$$y = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = -1$$

El sistema tiene solución única para $a \neq 1; a \neq -2$.

Para $a = 0$ el sistema tiene la solución:
$$\boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}}$$

b) Como hemos visto ocurre para $a = -2$ y el sistema es:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Simplificando y despejando $\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 + z \Rightarrow$

$$x + 1 + z - 2z = 1 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

La solución es
$$\boxed{\begin{cases} x = z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{cases}}$$

c) El sistema no tiene solución para $a = 1$, como se ha visto en el estudio del sistema

A.2:

- a) **[1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.
- b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

a)

$$\int x^2 \cos x \, dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \text{sen} x \end{array} \right\} = x^2 \cdot \text{sen} x - \int \text{sen} x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \cdot \text{sen} x - 2 \int x \cdot \text{sen} x dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen} x dx \Rightarrow v = \int \text{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= x^2 \cdot \text{sen} x - 2 \left(x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx \right) = x^2 \cdot \text{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= \boxed{x^2 \cdot \text{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \text{sen} x + K}$$

b)

Antes de calcular el área usando la integral definida entre 0 y π , comprobemos donde corta la función el eje OX, por si estos posibles puntos de corte estuvieran entre 0 y π :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; \dots \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$, por lo que el área debemos dividirla en dos integrales definidas, una de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y otra de $\frac{\pi}{2}$ a π

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= \left[x^2 \cdot \text{sen} x + 2x \cos x - 2 \text{sen} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2 \text{sen} \frac{\pi}{2} \right) - (0^2 \cdot \text{sen} 0 + 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 - 2 \text{sen} 0) = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx &= \left[x^2 \cdot \text{sen} x + 2x \cos x - 2 \text{sen} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= (\pi^2 \cdot \text{sen} \pi + 2 \cdot \pi \cdot \cos \pi - 2 \text{sen} \pi) - \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2 \text{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx \right| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \left| -2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2 \right| = \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 + 2\pi + \frac{\pi^2}{4} - 2 = \boxed{\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4} \end{aligned}$$

A.3: Los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C .

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C .

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π .

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

- a) Determinemos los vectores directores del plano $\overline{AB} = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0)$ y $\overline{AC} = (0, 0, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 3)$ y elegimos el punto $A(3, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x - 27 - (-9z - 9y) = 0 \Rightarrow 9x - 27 + 9z + 9y = 0$$

Simplificando la ecuación del plano es $\boxed{\pi: x + y + z - 3 = 0}$

- b) Si la recta es perpendicular al plano su vector director es el normal al plano π

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

- c) D pertenece a la recta, luego sus coordenadas son $D(1+t, 1+t, 1+t)$

Para aplicar la fórmula del volumen del tetraedro nos falta el vector

$$\overline{AD} = (1+t, 1+t, 1+t) - (3, 0, 0) = (t-2, t+1, t+1)$$

$$\text{Volumen del tetraedro de vértices } A, B, C \text{ y } D = \frac{|\text{Det}(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|}{6} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ t-2 & t+1 & t+1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{|9t - 18 - (-9t - 9 - 9t - 9)|}{6} = \frac{|27t|}{6}$$

Como dicho volumen debe ser 18 lo igualamos y resolvemos la ecuación para determinar t y por tanto las coordenadas del punto D.

$$\frac{|27t|}{6} = 18 \Rightarrow |27t| = 108 \Rightarrow |t| = \frac{108}{27} = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow D(1+t, 1+t, 1+t) = \boxed{D(5, 5, 5)} \\ t = -4 \Rightarrow D(1+t, 1+t, 1+t) = \boxed{D(-3, -3, -3)} \end{cases}$$

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60% de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

- a) [1 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
- b) [1,5 p.] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

- a) $X =$ Tiempo de duración en horas de una bombilla
 $X = N(\mu, \sigma)$

$$P(X < 5061,2) = 0,6950$$

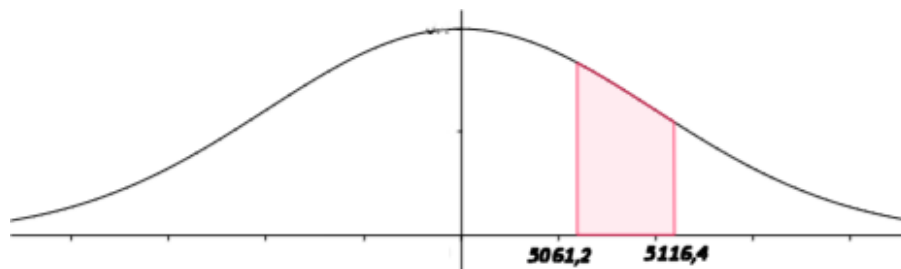
$$P(X > 5116,4) = 0,1660$$

Nos piden calcular $P(5061,2 < X < 5116,4)$.

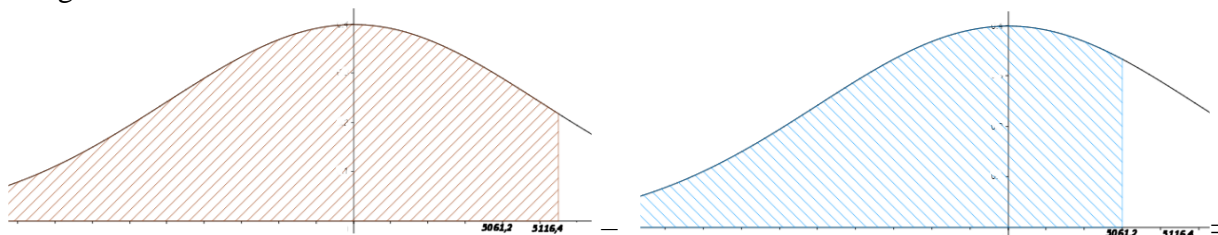
$$\begin{aligned} P(5061,2 < X < 5116,4) &= P(X < 5116,4) - P(X < 5061,2) = \\ &= (1 - P(X > 5116,4)) - P(X < 5061,2) = \\ &= (1 - 0,1660) - 0,6950 = \boxed{0,1390} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

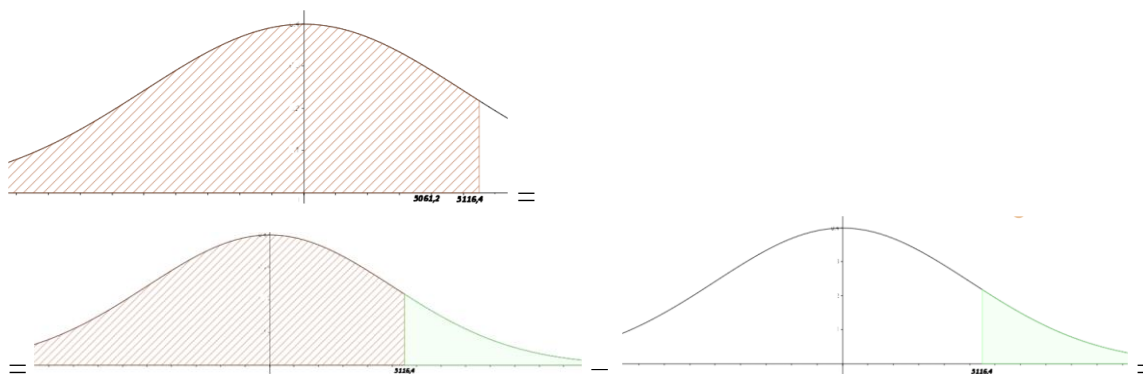
Gráficamente:



Es igual a:



Y además:



Por lo que

$$\begin{aligned} P(X > 5116,4) &= 1 - P(X < 5116,4) \\ &= 0,1660 = 1 - P(X < 5116,4) \\ P(X < 5116,4) &= 1 - 0,1660 = 0,834 \end{aligned}$$

Juntando toda la información:

$$P(5061,2 < X < 5116,4) = P(X < 5116,4) - P(X < 5061,2) = 0,834 - 0,695 = \boxed{0,139}$$

b) Si tipificamos la distribución para poder usar la tabla de la $N(0,1)$, tenemos que:

$$P(X < 5061,2) = 0,6950 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5061,2 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{5061,2 - \mu}{\sigma}\right) = 0,6950$$

Buscando en la tabla de la $N(0,1)$ se cumple:

$$\frac{5061,2 - \mu}{\sigma} = 0,51$$

Por el mismo procedimiento:

$$P(X > 5116,4) = 0,1660 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{5116,4 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5116,4 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1660$$

$$1 - P\left(Z < \frac{5116,4 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1660 \Rightarrow P\left(Z < \frac{5116,4 - \mu}{\sigma}\right) = 0,834$$

Buscando en la tabla de la $N(0,1)$ tenemos que

$$\frac{5116,4 - \mu}{\sigma} = 0,97$$

Juntamos las dos igualdades y resolvamos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5061,2 - \mu}{\sigma} = 0,51 \\ \frac{5116,4 - \mu}{\sigma} = 0,97 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5061,2 - \mu = 0,51\sigma \\ 5116,4 - \mu = 0,97\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \mu = 5061,2 - 0,51\sigma$$

$$5116,4 - (5061,2 - 0,51\sigma) = 0,97\sigma \Rightarrow 5116,4 - 5061,2 = 0,97\sigma - 0,51\sigma$$

$$55,2 = 0,46\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{55,2}{0,46} = 120 \text{ horas}$$

$$\text{Y sustituyendo } \mu = 5061,2 - 0,51\sigma = 5061,2 - 0,51 \cdot 120 = 5000 \text{ horas}$$

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .
 b) [0,5 p.] Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
 c) [1 p.] Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

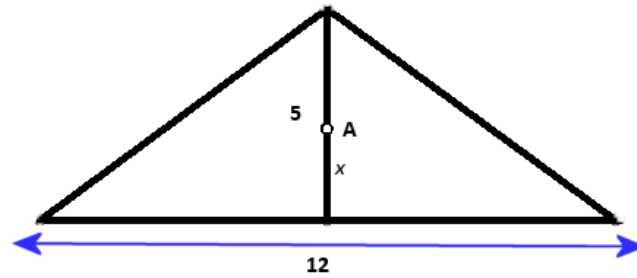
$$b) A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Para que exista la inversa debe cumplirse que su determinante no sea nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Entonces existe la inversa de } A.$$

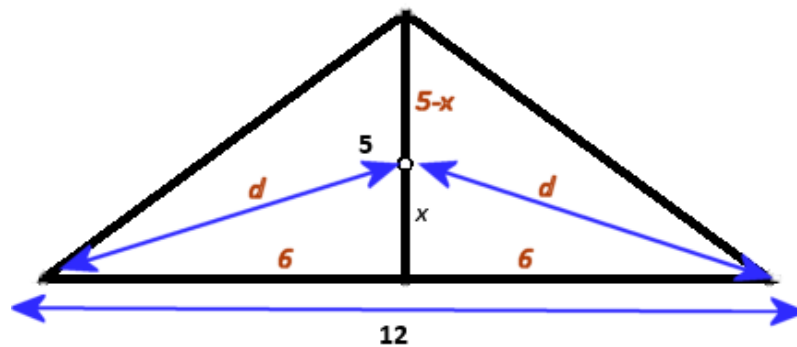
$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



- a) [0,5 p.] Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$
- b) [1,5 p.] Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
- c) [0,5 p.] Calcule dicha cantidad mínima.

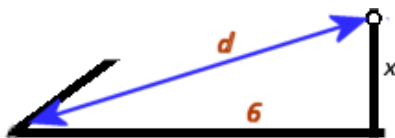
a) Observando el dibujo del enunciado y añadiendo datos al dibujo:



La suma de distancias del punto A a cada vértice es:

$$f(x) = 5 - x + d + d = 5 - x + 2d$$

Resolviendo el triángulo rectángulo:



aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{x^2 + 6^2} = \sqrt{x^2 + 36}$$

La suma de distancias queda:

$$f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$$

- b) Buscamos los mínimos de la función $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

Calculamos su derivada e igualamos a cero:

$$f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36} \Rightarrow f'(x) = -1 + \cancel{2} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 36}} \cdot (2x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 1 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36}$$

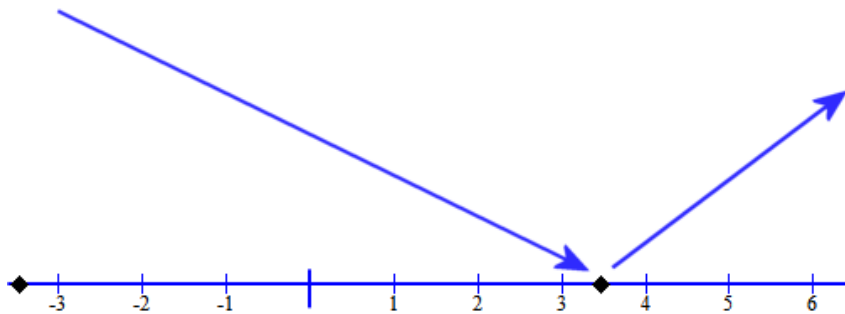
Elevando al cuadrado:

$$(2x)^2 = (\sqrt{x^2 + 36})^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 3,46$$

Comprobamos si es un mínimo estudiando el comportamiento de la derivada de la función en todo su dominio:

En el intervalo $(-3,46, 3,46)$ tomo el punto $x = 0 \Rightarrow f'(0) = -1 + \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 36}} = -1 < 0$ la función decrece.

En el intervalo $(3,46, +\infty)$ tomo el punto $x = 5 \Rightarrow f'(5) = -1 + \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{5^2 + 36}} = -1 + \frac{10}{\sqrt{61}} > 0$ la función crece.



La función presenta un **mínimo** en $x = \sqrt{12} = 3,46$

O bien se comprueba que es mínimo con la segunda derivada

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} \Rightarrow f''(x) = 0 + \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 36} - 2x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}}}{(\sqrt{x^2 + 36})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 36} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 36}}}{x^2 + 36}$$

$$x = \sqrt{12} \Rightarrow f''(\sqrt{12}) = \frac{2 \cdot \sqrt{(\sqrt{12})^2 + 36} - \frac{2(\sqrt{12})^2}{\sqrt{(\sqrt{12})^2 + 36}}}{(\sqrt{12})^2 + 36} = \frac{2\sqrt{48} - \frac{24}{\sqrt{48}}}{48} > 0$$

Luego en $x = \sqrt{12}$ hay un mínimo

c) Para el valor $x = \sqrt{12} = 3,46$ la suma de distancias es

$$f(x) = 5 - \sqrt{12} + 2\sqrt{(\sqrt{12})^2 + 36} = 5 - \sqrt{12} + 2\sqrt{48} = 5 - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = \boxed{5 + 6\sqrt{3}}$$

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

- a) Los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales, $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes. Solo pueden cortarse o cruzarse.

Para ver cuál de estos dos casos es, usemos los vectores directores y el vector formado por un punto de cada recta:

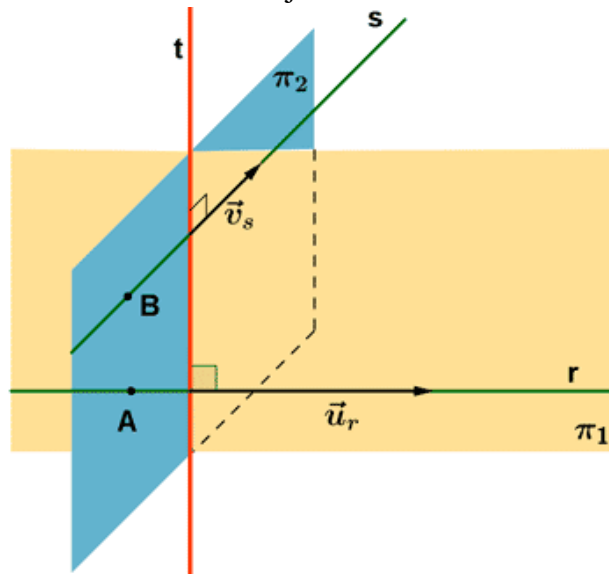
$$P_r(5,6,-1) \text{ y } P_s(1,0,-1) \Rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = (1,0,-1) - (5,6,-1) = (-4,-6,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,1,1) \\ \vec{v}_s = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (-4,-6,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 6 - (-4 + 0 + 6) = -4 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes y **las rectas se cruzan**.

- b) **Una forma de resolverlo:**

Para hallar la recta t perpendicular a ambas rectas y que las corte a las dos, vamos a determinar los dos planos que contienen a cada una de las rectas y además tienen como vector director el perpendicular a ambas rectas. Observad el dibujo:



El vector normal a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,1,1) \\ \vec{v}_s = (1,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + j + k - (k - j + i) = -2i + 2j = (-2, 2, 0)$$

$$\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$$

π_1 es el plano que contiene a la recta r con vectores directores $\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,1,1) \\ \pi_1 : \vec{v}_t = (-1,1,0) \\ P_r(5,6,-1) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y+6+z+1 - (-z-1+x-5) = 0$$

$$-y+6+z+1+z+1-x+5=0$$

$$\pi_1 : -x - y + 2z + 13 = 0$$

π_2 es el plano que contiene a la recta s con vectores directores $\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v}_s = (1, 1, -1)$:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, -1) \\ \pi_2 : \vec{v}_t = (-1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, -1) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + z + 1 - (-z - 1 - x + 1) = 0$$

$$y + z + 1 + z + 1 + x - 1 = 0$$

$$\pi_2 : x + y + 2z + 1 = 0$$

La recta pedida tiene por ecuación (implícita):

$$t: \begin{cases} -x - y + 2z + 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Otra forma de resolverlo:

Hallo el vector normal a ambas rectas que es el vector director de la recta t : $\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$

Determino el plano π_1 que contiene a la recta r con vectores directores $\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$:

$$\pi_1 : -x - y + 2z + 13 = 0$$

Determino el punto de corte de este plano con la otra recta s :

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : -x - y + 2z + 13 = 0 \\ s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -x - y + 2z + 13 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{array} \Rightarrow -1 - t - t - 2 - 2t + 13 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -4t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10}{-4} = 2,5 \Rightarrow y = 2,5 \\ x = 1 + 2,5 \\ z = -1 - 2,5 \end{array} \right\} \Rightarrow Q(3,5; 2,5; -3,5)$$

La recta t pedida tiene ecuación:

$$t: \begin{array}{l} Q(3,5; 2,5; -3,5) \in t \\ \vec{v}_t = (-1, 1, 0) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 3,5 - t \\ y = 2,5 + t \\ z = -3,5 \end{cases}$$

Una tercera forma de hacerlo:

El vector perpendicular a ambas rectas es $\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$.

Las rectas tienen ecuaciones:

$$s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = -1 - \mu \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

La recta t perpendicular a ambas rectas corta a r en un punto $A(5 + \lambda, 6 + \lambda, -1 + \lambda)$ y a la recta s en otro punto $B(1 + \mu, \mu, -1 - \mu)$

El vector $\overline{AB} = (1 + \mu, \mu, -1 - \mu) - (5 + \lambda, 6 + \lambda, -1 + \lambda) = (-4 + \mu - \lambda, \mu - 6 - \lambda, -\mu - \lambda)$ y

$\vec{v}_t = (-1, 1, 0)$ tienen la misma dirección, por lo que deben tener coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-4+\mu-\lambda}{-1} = \frac{\mu-6-\lambda}{1} = \frac{-\mu-\lambda}{0} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{-4+\mu-\lambda}{-1} = \frac{\mu-6-\lambda}{1} \\ \frac{\mu-6-\lambda}{1} = \frac{-\mu-\lambda}{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} -4+\mu-\lambda = -\mu+6+\lambda \\ 0 = -\mu-\lambda \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \mu = -\lambda \Rightarrow -4-\lambda-\lambda = \lambda+6+\lambda \Rightarrow \\ -2\lambda-2\lambda = 10 &\Rightarrow \lambda = \frac{10}{-4} = -2,5 \end{aligned}$$

El punto A de la recta r que está en la recta t tiene coordenadas

$$A(5-2,5, 6-2,5, -1-2,5) = (2,5, 3,5, -3,5)$$

La recta pedida tiene ecuación:

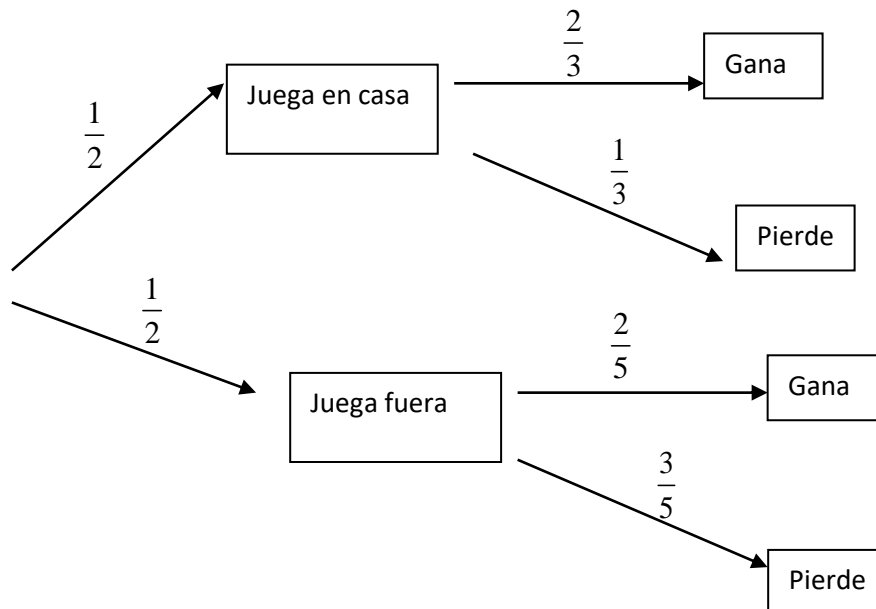
$$t: \begin{cases} A(2,5; 3,5; -3,5) \in t \\ v_t = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2,5 - \lambda \\ y = 3,5 + \lambda \\ z = -3,5 \end{cases}$$

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

- a) [1 p.] Sin saber donde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.
 b) [1,5 p.] Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que juegare en casa?

a) Construyamos el diagrama de árbol:



$$P(\text{Gane}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

b)

$$P(\text{Jugara en casa sabiendo que ha ganado}) = P(\text{juegue en casa} / \text{ganó}) =$$

$$= \frac{P(\text{juegue en casa y gane})}{P(\text{gane})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$