MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álxebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) En primeiro lugar, despéxase X:

$$A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB).$$

É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Analízanse agora as dimensións: do esquema

$$\underbrace{A^2}_{4\times 4}\underbrace{X}_{p\times q} + \underbrace{A}_{4\times 4}\underbrace{B}_{r\times 3} = \underbrace{B}_{r\times 3}$$

dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3.

1.b)

- **Cálculo de $(A^2)^{-1}$**: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$.

  Logo $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Cálculo de $B - AB$**: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde

  $$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de X:**

  $$X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa a 1.b):

Dado que $B = -A$, tense $X = (A^2)^{-1}(B - AB) = (A^2)^{-1}(-A + A^2) = -A^{-1} + I$. Agora, como $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1$, a inversa de A vén dada por $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e entón

$$X = -A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ (m+3)x & + & my & = & 3m+6.\end{cases}$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ 0 & m^2+m & 6 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ & & (m^2+m)y & = & 6,\end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión. Hai que notar que $m^2 + m = m(m+1) = 0$ se, e só se, $m \in \{-1,0\}$ e que $m + 3 = 0$ se, e só se, $m = -3$. Conseguintemente:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
$$y = \frac{6}{m^2+m}, \quad x = \frac{3m + m^2y}{m+3}.$$
- Se $m = -3$, o sistema triangular redúcese a $\begin{cases}-9y & = & -9, \\ 6y & = & 6,\end{cases}$ e é por tanto compatible indeterminado (ten infinitas solucións), porque calquera par $\begin{cases}x = \lambda, \\ y = 1,\end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, é solución.
- Se $m \in \{-1,0\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a segunda ecuación queda $0 = 6$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 2$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + m^3 + 3m^2 = m^3 + 4m^2 + 3m = m(m^2 + 4m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3, -1, 0\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,0\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m = -3$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$, co cal tamén $\operatorname{rank} A^* = 1$. Ao ser $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 1 <$ n.º de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = -1$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que, de novo, o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

Solución:

A función f é derivable, e por tanto continua, en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para valores calquera de a e b; só hai que facer entón o estudo no punto $x = 0$. Debido a que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a-\cos x}{x}$ non é finito cando $a \neq 1$, f non pode ser continua neses casos. Fixemos pois $a = 1$ e consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

- Continuidade: nótese que $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$ (onde se usou a regra de L'Hôpital), e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} bx = 0$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(a, b) \in \{1\} \times \mathbb{R}$.
- Derivabilidade: séguese a asumir que $a = 1$, co cal f é continua (se non é continua, non pode ser derivable). Temos polo tanto que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2} & \text{se} \quad x < 0, \\ b & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Como f é continua, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x-1+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + x\cos x - \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} b = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$ xa que a ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou dúas veces a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{bx}{x} = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

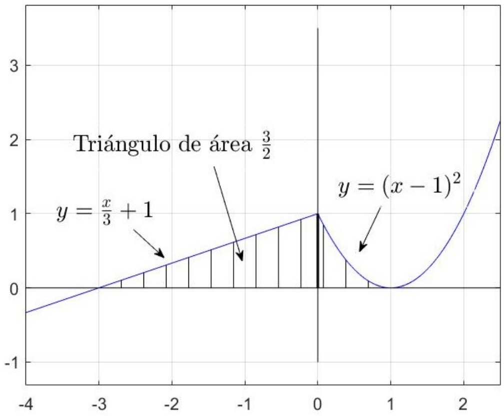
4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & \text{se} \quad x<0,\\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x\geq 0.\end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución:

4.a)



Tendo en conta que $y=\frac{x}{3}+1$ é a recta que pasa por $(-3{,}0)$ e por $(0{,}1)$ e que $y=(x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1{,}0)$ que pasa polos puntos $(0{,}1)$ e $(2{,}1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A=\frac{3}{2}+\int_0^1(x-1)^2dx=\frac{3}{2}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{9+2}{6}=\frac{11}{6}\ \mathrm{u}^2=1.8\overline{3}\ \mathrm{u}^2,$$

onde u indica "unidade de lonxitude".

4.b) Mediante o cambio de variable

$$z=x^2-1,\ \ dz=2x\,dx,$$

obtense

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{z}\,dz=\frac{1}{2}\frac{z^{3/2}}{3/2}+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π. En caso de que se corten, achar o punto de corte.

Solución:

O vector $\vec{n}_\pi(-2,1,1)$ é normal ao plano π. Como $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = -2 + 3 = 1 \neq 0$, os vectores $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ non son perpendiculares, e polo tanto r e π córtanse nun punto.

As ecuacións paramétricas de r son

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = \quad 0, \\ z = \quad 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Substituíndo na ecuación do plano obtense o valor de λ que proporcionará o punto de corte:

$$-2(1 + \lambda) + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Téñense así os valores seguintes:

$$x = 1 + \lambda = 3,$$
$$y = 0,$$
$$z = 3\lambda = 6,$$

é dicir, r e π córtanse no punto $Q(3,0,6)$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

Solución:

6.a) Ao ser coplanarios, son linealmente dependentes, de xeito que o valor de k pode ser calculado como segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k-4=0 \Leftrightarrow k=1.$$

6.b) $Q(1,0,-1) \in r$ e $\vec{d}_r(1,-4,3)$ é vector director de r. O plano π pasa por $P(1,0,0)$ e está xerado por $\vec{d}_r(1,-4,3)$ e $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$, é dicir,

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x-4+y=0 \Leftrightarrow \pi: 4x+y-4=0.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacese no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

Solución:

Se $RU =$ "ser natural do Reino Unido" e $AH =$ "aprobar con honores", tense a seguinte táboa de continxencia:

	$\boldsymbol{AH}$	$\overline{\boldsymbol{AH}}$	
$\boldsymbol{RU}$	$57 \times \mathbf{0.83} = 47.31$		$100 \times \mathbf{0.57} = 57$
$\overline{\boldsymbol{RU}}$	32.69		
	$100 \times \mathbf{0.80} = 80$		$\mathbf{100}$

A probabilidade pedida é polo tanto $P(\overline{RU}|AH) = \frac{32.69}{80} = 0.408625$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

Solución:

Sexa $X =$ "número de árbores de máis de 30 anos, de entre os 40".

$$X \longrightarrow B(n, p), \quad \text{con } n = 40 \text{ e } p = 0.2.$$

Logo $q = 1 - p = 0.8$, co que a probabilidade pedida é

$$P(X = 4) = \binom{40}{4} p^4 q^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(0.2)^4(0.8)^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot (0.2)^4(0.8)^{36}$$
$$= 91300 \cdot (0.2)^4(0.8)^{36} \approx 0.0475.$$

8.b)

$$X \longrightarrow N(15, \sigma) \Longrightarrow Z = \frac{X - 15}{\sigma} \longrightarrow N(0,1).$$

Polo tanto,

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{18 - 15}{\sigma}\right) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915.$$

Indo agora á táboa da distribución $N(0,1)$, vese que $\frac{3}{\sigma} \approx 0.5$, de onde $\sigma \approx \frac{3}{0.5} = 6$.