Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade CONVOCATORIA ORDINARIA 2020	Código: 20

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álxebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$. Pídese:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: neste caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.)

b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA+(A+B)^T=2I+XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $A+B$.

Solución:

1.a) Nótese que $2A=A+B+A-B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&-2\end{pmatrix}$, de onde $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$. Polo tanto, $B=A+B-A=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}$.

Como $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ e $B^2=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}$, tense finalmente que

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-8\\4&8\end{pmatrix}.$$

1.b) En primeiro lugar, imos despexar X:

$$XA+(A+B)^T=2I+XB\Leftrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T\Leftrightarrow X=[2I-(A+B)^T](A-B)^{-1}.$$

Non hai ningún problema no último paso porque $A-B$ é invertible: $\det(A-B)=16\neq0$.

- Cálculo de $2I-(A+B)^T$: como $A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$,
$$2I-(A+B)^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}.$$
- Cálculo de $(A-B)^{-1}$: ao ser $A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$ e $\det(A-B)=16$,
$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2&-4\\4&0\end{pmatrix}^T=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2&4\\-4&0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&0\end{pmatrix}.$$

Tras estes cálculos, resulta

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0&0\\0&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & & & = & 2m, \\ x & & & + & z & = & 0, \\ x & + & my & & & = & 0. \end{array}\right.$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\overset{F_2 - mF_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 - mF_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1+m^2 & -2m^2 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 0, \\ y & - & mz & = & 2m, \\ & & (-1+m^2)z & = & -2m^2, \end{array}\right.$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{-2m^2}{-1+m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$$
- Se $m \in \{-1,1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$.

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Longleftrightarrow m \in \{-1,1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-\mathrm{e}^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

Solución:

3.a)

indeterminación $\frac{0}{0}$, L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{2-2\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x}{2\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1}{2}.$$

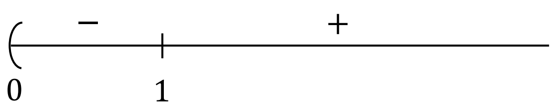
Falando con rigor, o límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{2-2\mathrm{e}^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x}{2\mathrm{e}^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, analogamente, o límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-\mathrm{e}^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{2-2\mathrm{e}^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x)=x(\ln x-1),\mathrm{Dom}(f)=(0,\infty).$$

$$f'(x)=\ln x-1+x\frac{1}{x}=\ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1,\infty)$:



SIGNO DE f'.

Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1,\infty)$. Dado que ademais é continua en $(0,\infty)$, conclúese que ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x=1$ e que non ten outros extremos.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Solución:

4.a)

- Continuidade: nótese que $f(0)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{2x}=1$, e, para calquera valor de $b\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2+bx+c=c$. Por conseguinte, f é continua en $x=0$ se, e soamente se, $(b,c)\in\mathbb{R}\times\{1\}$.
- Derivabilidade: posto que f ten que ser continua para poder ser derivable, é obrigado que $c=1$, e así
$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x>0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & \text{se} \quad x<0, \\ 2x+b & \text{se} \quad x>0. \end{cases}$$
Como f é continua, $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}=2$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+b)=b$, a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $b=2$ e $c=1$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Do mesmo xeito que na solución anterior, chégase a $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x>0, \end{cases}$ xa que c ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}=2$ (o asterisco * indica o uso da regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+bx+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+b)=b$, conclúese que a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $b=2$ e $c=1$.

4.b) Aplicando a fórmula de integración por partes con
$$u=\ln x-1, \quad du=\frac{1}{x}dx,$$
$$dv=xdx, \quad v=\frac{1}{2}x^2,$$
obtense
$$\int x(\ln x-1)dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+C,$$
e polo tanto
$$\int_1^2 x(\ln x-1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]_1^2=2\left(\ln 2-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)=2\ln 2-3+\frac{3}{4}=\ln 4-\frac{9}{4}\approx -0.8637.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.
b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ e que pasa polo punto $P(-1,-2,2)$.

Solución:

5.a) Se π é o plano pedido, π pasa por $A(3,0,-1)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ e $\overrightarrow{AC}(4,1,6)$, co cal

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto que $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6x-18+8y+z+1-4z-4-2x+6-6y = 4x+2y-3z-15$, a ecuación implícita do plano é $\pi: 4x+2y-3z-15=0$.

5.b) O vector normal ao plano π é un vector director de r: $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(4,2,-3)$. Obtéñense así as seguintes ecuacións paramétricas de r:

$$r: \begin{cases} x = -1+4\lambda, \\ y = -2+2\lambda, \\ z = \ \ 2-3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

$\vec{d}_r(2,-1,-2)$ e $\vec{d}_s(1,4,3)$ son vectores directores de r e s, respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan. Pódese discernir cal desas dúas situacións se dá a partir das ecuacións paramétricas. En efecto, ao ser

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R},$$

as rectas r e s cortaranse se, e só se, o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu, \end{cases}$ ten solución única e ademais esa solución satisfai tamén a igualdade $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu$.

$$\begin{Bmatrix} 3 + 2\lambda = \mu \\ -\lambda = -3 + 4\mu \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda - \mu = -3 \\ -\lambda - 4\mu = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda - \mu = -3 \\ -2\lambda - 8\mu = -6 \end{Bmatrix}.$$

Sumando as dúas últimas ecuacións obtemos $-9\mu = -9$, de onde $\mu = 1$, o que implica $\lambda = 3 - 4\mu = -1$. Como ademais $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu = 1$, conclúese que r e s córtanse no punto $P(3 + 2\lambda, -\lambda, -1 - 2\lambda) = P(1,1,1)$.

Solución alternativa:

$\vec{d}_r(2,-1,-2)$ e $\vec{d}_s(1,4,3)$ son vectores directores de r e s, respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan.

$$P(3,0,-1) \in r, \quad Q(0,-3,-2) \in s, \quad \overrightarrow{PQ}(-3,-3,-1).$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 6 - 24 + 18 - 1 = 0$, de xeito que $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ e $\overrightarrow{PQ}$ son coplanarios e polo tanto as rectas r e s córtanse.

Para calcular o punto de corte, téñense en conta as ecuacións paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R},$$

e se resolve o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu. \end{cases}$ Basta ver que $\mu = 1$, por exemplo como se fixo arriba (non é necesario calcular λ), de onde se infire que o punto de corte é $P(\mu, -3 + 4\mu, -2 + 3\mu) = P(1,1,1)$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:

Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

Solución:

Se $M =$ "tomar o medicamento" e $C =$ "curarse", tense a seguinte táboa de continxencia:

	$\boldsymbol{M}$	$\overline{\boldsymbol{M}}$	
$\boldsymbol{C}$	$150 \times \mathbf{0.8} = 120$		
$\overline{\boldsymbol{C}}$	30		
	$\mathbf{150}$	100	$\mathbf{250}$

A probabilidade pedida é $P(\bar{M} \cup \bar{C}) = \frac{100+30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0.52$.

Solución alternativa:

Se $M =$ "tomar o medicamento" e $C =$ "curarse", sábese que $P(M) = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$ e que $P(C|M) = 0.8 = \frac{4}{5}$. Sábese tamén que $P(C|M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)}$ e que, en virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{M} \cup \bar{C} = \overline{M \cap C}$. Así pois, a probabilidade pedida é

$$P(\bar{M} \cup \bar{C}) = P(\overline{M \cap C}) = 1 - P(M \cap C) = 1 - P(M)P(C|M) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:
Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

Solución:

Sexa $X =$ "tempo, en minutos, empregado para realizar o traballo".

$$X \longrightarrow N(20,4) \Longrightarrow Z = \frac{X-20}{4} \longrightarrow N(0,1).$$

Logo

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{-4}{4} \leq Z \leq \frac{6}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1).$$

Como $P(Z \leq 1.5) \approx 0.9332$ e $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$, a probabilidade pedida é

$$P(16 \leq X \leq 26) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745.$$