UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Universidades Públicas de Andalucía

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

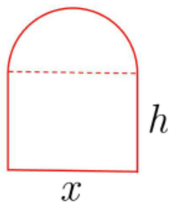
c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.



Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

c) [1 punto] Calcula el área.

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (*I* es la matriz identidad).

b) [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con *x = 1*.

Ejercicio 4.- Considera el punto *P(1, -1, 0)* y la recta *r* dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) **[1’25 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.

b) **[1’25 puntos]** Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 2.- Calcula $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ $\left(\text{sugerencia } t=\sqrt[4]{x}\right)$.

Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$ y $\vec{w}=(m,1,n)$.

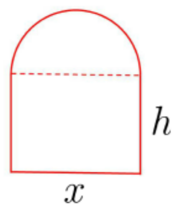
a) [1,25 puntos] Halla *m* y *n* sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) [1,25 puntos] Para *n = 1*, halla los valores de *m* para que el tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

SOLUCIONES

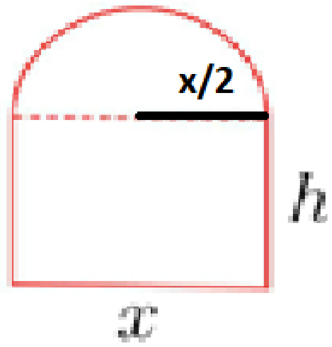
Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.



Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.

Añadimos al dibujo los datos necesarios para determinar el área del rectángulo y del semicírculo que la forman.



El área del rectángulo es $x \cdot h$ y del semicírculo es $\frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{\pi}{8}x^2$. El área total es la suma de ambas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área del hueco} = \frac{\pi}{8}x^2 + x\cdot h \\ Hueco = 16\ m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{8}x^2 + x\cdot h = 16 \Rightarrow x \cdot h = 16 - \frac{\pi}{8}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8x}\cdot x^2 \Rightarrow h = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x$$

Deseamos hacer mínimo el perímetro.

$$\left.\begin{array}{r} Perimetro = x + 2h + \pi\frac{x}{2} = \\ h = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x \end{array}\right\} \Rightarrow Perimetro(x) = x + 2\left(\frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x\right) + \pi\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$Perimetro(x) = x + \frac{32}{x} - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}x = \frac{32}{x} + \frac{4}{4}x - \frac{\pi}{4}x + \frac{2\pi}{4}x = \frac{32}{x} + \frac{4-\pi+2\pi}{4}x = \frac{32}{x} + \frac{4+\pi}{4}x$$

Calculamos la derivada del perímetro y la igualamos a cero.

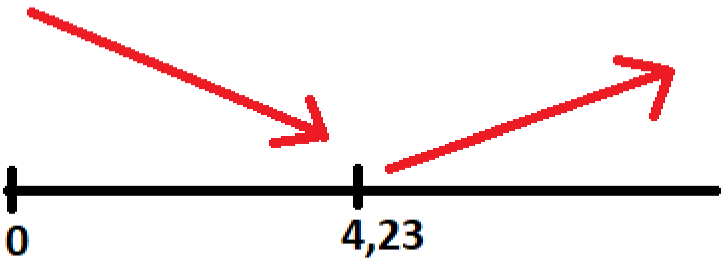
$$Perimetro(x) = \frac{32}{x} + \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow Perimetro\,'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{4+\pi}{4}$$

$$Perimetro\,'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{4+\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{32}{x^2} = \frac{4+\pi}{4} \Rightarrow 128 = (4+\pi)x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{128}{4+\pi} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}} = 4,23$$

Como la “x” es una longitud solo consideramos el valor positivo de la raíz.
Veamos cómo cambia el signo de la derivada antes y después de $x = 4,23$.

- En el intervalo $(0, 4.23)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale
  $Perimetro\,'(1) = -\frac{32}{1^2} + \frac{4+\pi}{4} < 0$ el perímetro decrece.
- En el intervalo $(4.23, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale
  $Perimetro\,'(5) = -\frac{32}{5^2} + \frac{4+\pi}{4} = 0.5 > 0$ el perímetro crece



Por lo que el perímetro presenta un mínimo en $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}} = 4,23$ metros

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

c) [1 punto] Calcula el área.

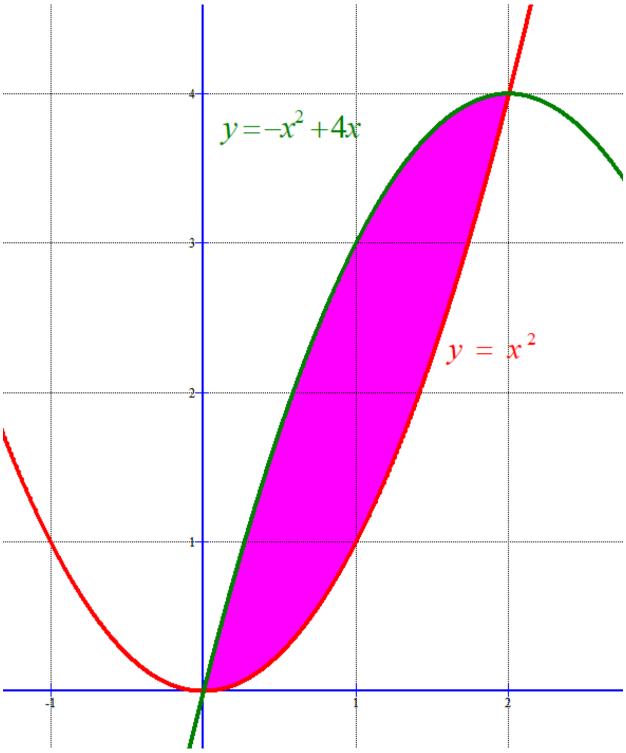
a) Las funciones son dos parábolas, para dibujarlas empezamos hallando los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ó \\ x = 2 \end{cases}$$

Obtenemos unas tablas de valores y dibujamos la región limitada por ambas gráficas.

x	$y = -x^2 + 4x$
-1	$-1-4=-5$
0	0
1	$-1+4=3$
2	4

x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4



b) El valor del área se puede calcular como la integral definida entre $x = 0$ y $x = 2$ de la diferencia entre la función superior $y = -x^2 + 4x$ y la función inferior $y = x^2$.

$$Área = \int_0^2 \left(-x^2 + 4x\right) - \left(x^2\right) dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x dx$$

c) Observando el dibujo de la región y contando cuadraditos (1 u^2) el área de la región rosa tiene un valor aproximado de 3 unidades cuadradas. Calculamos el valor exacto resolviendo la integral del apartado anterior.

$$Área = \int_0^2 -x^2 + 4x - x^2 dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = \left[-2\frac{2^3}{3} + 2\cdot 2^2\right] - \left[-2\frac{0^3}{3} + 2\cdot 0^2\right] =$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} = 2,667\, u^2$$

Ejercicio 3.- Considera $A=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (*I* es la matriz identidad).

b) [1,5 puntos] Resuelve $AX=-3X$. Determina, si existe, alguna solución con *x = 1*.

a) Para que la matriz $A+\lambda I$ no tenga inversa debe tener determinante nulo.

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\lambda&-2&0\\-2&1+\lambda&0\\0&0&-2+\lambda\end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante

$$|A+\lambda I|=\begin{vmatrix}-2+\lambda&-2&0\\-2&1+\lambda&0\\0&0&-2+\lambda\end{vmatrix}=(-2+\lambda)(1+\lambda)(-2+\lambda)-4(-2+\lambda)=$$

$$=(-2+\lambda)\left[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4\right]=(-2+\lambda)\left[-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2-4\right]=(-2+\lambda)\left[\lambda^2-\lambda-6\right]$$

Lo igualamos a cero.

$$|A+\lambda I|=0\Rightarrow(-2+\lambda)\left[\lambda^2-\lambda-6\right]=0\Rightarrow\begin{cases}-2+\lambda=0\Rightarrow\boxed{\lambda=2}\\ \lambda^2-\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-6)}}{2}=\\ =\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+5}{2}=\boxed{3=\lambda}\\ \dfrac{1-5}{2}=\boxed{-2=\lambda}\end{cases}\end{cases}$$

La matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa para los valores $\lambda=-2$; $\lambda=2$ y $\lambda=3$

b) Convertimos la igualdad matricial $AX=-3X$ en un sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$AX=-3X\Rightarrow\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2x-2y\\-2x+y\\-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\-3y\\-3z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x-2y=-3x\\-2x+y=-3y\\-2z=-3z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}x-2y=0\\-2x+4y=0\\\boxed{z=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-2y=0\\-2x+4y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Dividimos la 2}^{\text{a}}\text{ ecuación}\\\text{por }-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-2y=0\\x-2y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\{Ecuaciones\ iguales\}\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow\boxed{x=2y}$$

La solución a la igualdad $AX = -3X$ es $x = 2t;\ y = t;\ z = 0$.

Para tener una solución con $x = 1$ tomamos el valor de $t = 0,5$.
La solución sería: $x = 1;\ y = 0,5;\ z = 0$

Ejercicio 4.- Considera el punto *P(1, -1, 0)* y la recta *r* dada por $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) **[1'25 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.

b) **[1'25 puntos]** Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.

a) Obtenemos el vector director y un punto de la recta.

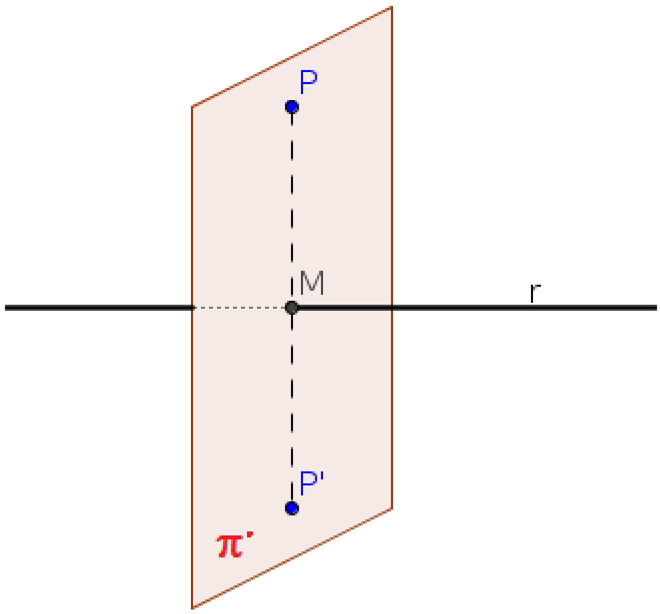
$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = (3,0,1) \\ Q_r = (1,-2,0) \end{cases}$$

El plano π que pasa por *P* y contiene a *r*, tiene como vectores directores $\vec{v_r}$ y $\overrightarrow{PQ_r}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (3,0,1) \\ \overrightarrow{PQ_r} = (1,-2,0)-(1,-1,0) = (0,-1,0) \\ P(1,-1,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv -3z + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 3z - 1 = 0}$$

b) Para hallar el punto *P´* simétrico de *P* respecto de la recta *r* seguimos los pasos indicados en el dibujo.



El plano π´ perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *P* tiene como vector normal el vector director de *r*.

$$\pi' \equiv \left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v_r} = (3,0,1) \\ P(1,-1,0) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \left.\begin{array}{l} 3x + z + D = 0 \\ P(1,-1,0) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 3+0+D=0 \Rightarrow D=-3$$

$$\pi' \equiv 3x + z - 3 = 0$$

Hallamos el punto *M* de corte de recta *r* y plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1+3t) + t - 3 = 0 \Rightarrow 3 + 9t + t - 3 = 0 \Rightarrow 10t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot 0 = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1,-2,0)$$

El punto M es el punto medio del segmento $\overline{P'P}$, por lo que se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} M(1,-2,0) \\ P(1,-1,0) \\ P'(a,b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow (1,-2,0) = \frac{(1,-1,0) + (a,b,c)}{2} \Rightarrow (2,-4,0) = (1,-1,0) + (a,b,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2,-4,0) - (1,-1,0) = (a,b,c) \Rightarrow (a,b,c) = (1,-3,0)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(1,-3,0)$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) El dominio de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntota vertical. $x=1$

Comprobamos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0}=\infty$

La asíntota vertical es $x=1$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

No tiene asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x+1$

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

La igualamos a cero, en busca de los puntos críticos de la función.

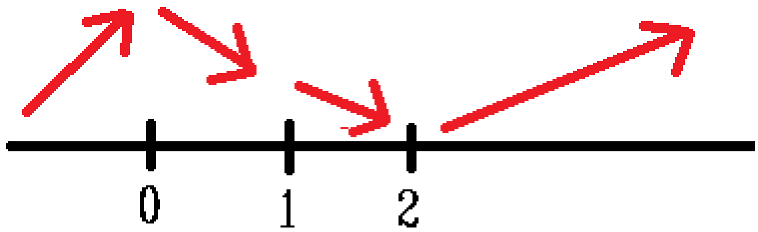
$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-2=0\to\boxed{x=2}\end{cases}$$

Como el valor *x = 1* está excluido del dominio lo añadimos a los valores *x = 0* y *x = 2* y valoramos la evolución del signo de la derivada antes de $x=0$, entre 0 y 1, entre 1 y 2 y después de $x=2$.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{(-1)^2-2(-1)}{(-1-1)^2}=\dfrac{1+2}{4}>0$, la función crece.

- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \dfrac{0.5^2 - 2\cdot 0.5}{(0.5-1)^2} = \dfrac{-0.75}{0.25} < 0$, la función decrece.
- En $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \dfrac{(1.5)^2 - 2(1.5)}{(1.5-1)^2} = \dfrac{2.25-3}{0.25} < 0$, la función decrece.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \dfrac{3^2-6}{(3-1)^2} = \dfrac{3}{4} > 0$, la función crece.

Lo obtenido se resume en un gráfico.



La función crece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(0,1)\cup(1,2)$.
Presenta un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$.
El valor de la función en estos puntos es:

$$x=0 \to f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \qquad x=2 \to f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

El máximo relativo es el punto (0, 0) y el mínimo relativo es (2,4)

Ejercicio 2.- Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ $\left(\text{sugerencia } t=\sqrt[4]{x}\right)$.

Calculamos primero la integral indefinida con el cambio de variable sugerido.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt[4]{x}=x^{1/4} \to t^4 = x \\ \sqrt{x}=x^{1/2}=\left(t^4\right)^{1/2}=t^{4/2}=t^2 \\ 4t^3dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{4t^3dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2+t} = \ldots$$

$$\boxed{\frac{t^3}{t^2+t} = \frac{t^3}{t(t+1)} = \frac{t^2}{t+1} = \frac{t^2-1+1}{t+1} = \frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1} = \frac{(t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}}+\frac{1}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}}$$

$$\ldots = 4\int t-1+\frac{1}{t+1}dt = 4\left(\int tdt - \int 1dt + \int \frac{1}{t+1}dt\right) = 4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Deshacemos cambio de variable} \\ t=\sqrt[4]{x} \end{array} \right\} = 4\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right) = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + K$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \left[2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right]_1^{16} =$$

$$= \left[2\sqrt{16} - 4\sqrt[4]{16} + 4\ln\left(\sqrt[4]{16}+1\right)\right] - \left[2\sqrt{1} - 4\sqrt[4]{1} + 4\ln\left(\sqrt[4]{1}+1\right)\right] =$$

$$= 8-8+4\ln 3 - 2 + 4 - 4\ln 2 = \boxed{2+4\ln 3 - 4\ln 2}$$

Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Llamamos *x = precio de 1 lápiz, y = precio de 1 rotulador, z = precio de 1 carpeta*.
"*El coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros*" → $3x+y+2z=15$
"*El coste de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros*" → $2x+4y+z=20$

a) Añadimos la condición dada. "*El coste de 1 lápiz y 7 rotuladores es de 25 euros*" → $x+7y=25$

Planteamos el sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+2z=15 \\ 2x+4y+z=20 \\ x+7y=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\text{Cambio la ecuación 1ª por la 3ª}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y \quad\; =25 \\ 2x+4y+z=20 \\ 3x+y+2z=15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +4y & +z & =20 \\ -2x & -14y & & =-50 \\ \hline & -10y & +z & =-30 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 3\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & +y & +2z & =15 \\ -3x & -21y & & =-75 \\ \hline & -20y & +2z & =-60 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y \quad\; =25 \\ -10y+z=-30 \\ -20y+2z=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\text{Divido ecuación 3ª por 2}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y \quad\; =25 \\ -10y+z=-30 \\ -10y+z=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\text{Ecuación 3ª = Ecuación 2ª}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y \quad\; =25 \\ -10y+z=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-7y \\ z=-30+10y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=25-7t \\ y=t \\ z=-30+10t \end{array}\right\}}$$

No se puede deducir el precio de cada artículo. La información proporcionada no es suficiente. Todos los precios quedan dependientes del precio de uno de los artículos.

b) "*Con el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices*" → $z=10x$

Añadimos esta ecuación al sistema anterior, aprovecho los cambios hechos en el sistema en el apartado anterior para eliminar una de las ecuaciones y resolvemos este sistema nuevo.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+2z=15 \\ 2x+4y+z=20 \\ x+7y=25 \\ z=10x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-7y \\ z=-30+10y \\ z=10x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-7y \\ 10x=-30+10y \end{array}\right\} \Rightarrow 10(25-7y)=-30+10y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 250-70y=-30+10y \Rightarrow 250+30=70y+10y \Rightarrow 280=80y \Rightarrow \boxed{y=\frac{280}{80}=3,5} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=25-7\cdot 3,5=25-24,5=0,5} \Rightarrow \boxed{z=10\cdot 0,5=5}$$

En este caso los precios se pueden determinar y son: 0,5 euros cada lápiz, 3,5 euros cada rotulador y 5 euros cada carpeta.

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1), \vec{v}=(0,2,1)\ y\ \vec{w}=(m,1,n)$.

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

a) Si los vectores $\vec{u}=(1,0,1), \vec{v}=(0,2,1)\ y\ \vec{w}=(m,1,n)$ son linealmente dependientes entonces se cumple que el determinante formado por sus coordenadas vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n-2m-1=0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ el producto escalar de ambos vale 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (1,0,1)(m,1,n)=0 \Rightarrow m+n=0 \Rightarrow m=-n$$

Si juntamos las dos condiciones tendremos un sistema que podemos resolver.

$$\left.\begin{array}{l} 2n-2m-1=0 \\ m=-n \end{array}\right\} \Rightarrow 2n+2n-1=0 \Rightarrow 4n=1 \Rightarrow \boxed{n=\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{m=-\frac{1}{4}}$$

Los valores buscados son $n=\frac{1}{4};\quad m=-\frac{1}{4}$

b) Para $n = 1$ los vectores quedan:

$$\vec{u}=(1,0,1), \vec{v}=(0,2,1)\ y\ \vec{w}=(m,1,1)$$

El volumen del tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(1,0,1) \\ \vec{v}=(0,2,1) \\ \vec{w}=(m,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow Volumen = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|2-2m-1| = \frac{1}{6}|1-2m|$$

Como el volumen debe ser 10 unidades cúbicas tenemos la igualdad siguiente que resolvemos.

$$\frac{1}{6}|1-2m|=10 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-2m=60 \Rightarrow 1-60=2m \Rightarrow \boxed{m=-\frac{59}{2}} \\ \qquad\qquad ó \\ 1-2m=-60 \Rightarrow -2m=-61 \Rightarrow \boxed{m=\frac{61}{2}} \end{array}\right.$$