Universidades Públicas de Andalucía

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**

**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD**

CURSO 2016-2017

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

**a) Duración: 1 hora y 30 minutos**

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

**d)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 $cm^2$, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

**Ejercicio 2.- [2,5 puntos]** Determina la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&3\\1&3&m-2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}m\\2m+1\\m-1\end{pmatrix}$$

**a) [1,25 puntos]** Discute el sistema según los valores de $m$.

**b) [1,25 puntos]** Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z=17$.

**Ejercicio 4.-** Los puntos $A(1, 1, 1)$ , $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

**a) [1 punto]** Calcula el área del paralelogramo.

**b) [1 punto]** Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

**c) [0,5 puntos]** Calcula las coordenadas del vértice $D$.

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**

**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD**

CURSO 2016-2017

**MATEMÁTICAS II**

Universidades Públicas de Andalucía

**Instrucciones:** **a) Duración: 1 hora y 30 minutos**

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

**c)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

**d)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

**a) [2 puntos]** Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**b) [0,5 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.

**Ejercicio 2.-** Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje *OX*, la recta $y=x$, la gráfica $y=\frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

**a) [0,5 puntos]** Haz un esbozo del recinto descrito.

**b) [1,5 puntos]** Calcula el área del recinto.

**c) [0,5 puntos]** Si consideras la gráfica $y=\frac{1}{x}$ en lugar de $y=\frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?.

**Ejercicio 3.-** Considera $A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

**a) [1,5 puntos]** Discute el rango de *A* según los valores de *k*.

**b) [1 punto]** Para $k = 1$, calcula el determinante de $2\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}$, siendo $A^t$ la traspuesta de *A*.

**Ejercicio 4.-** Considera el punto *P(0, 1, 1)* y la recta *r* dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=\ \ 2 \end{cases}$

**a) [1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.
**b) [1,25 puntos]** Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.

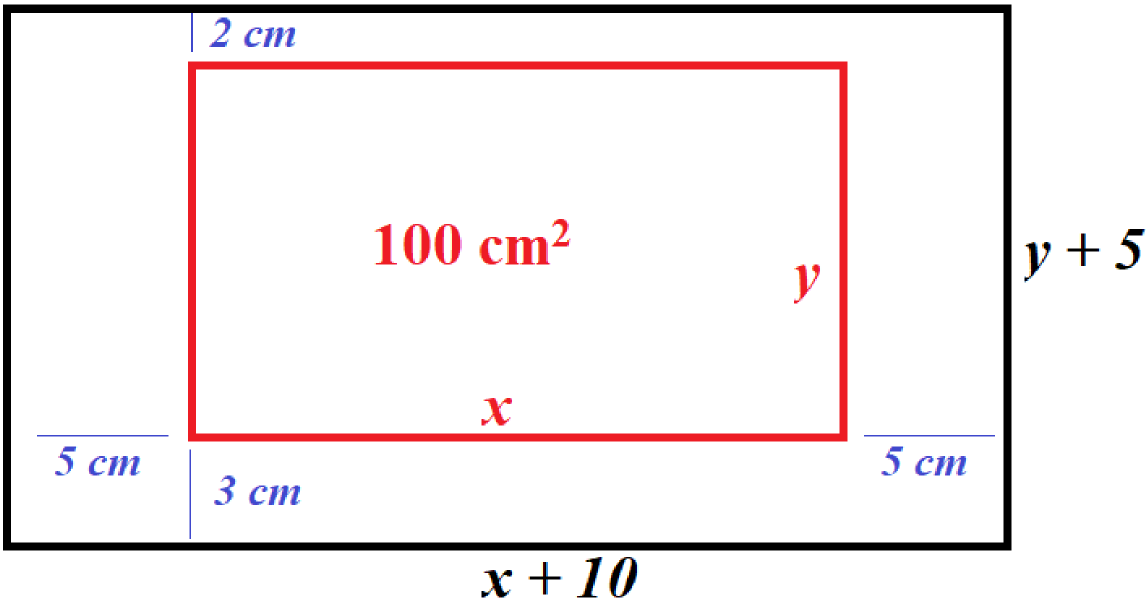
## SOLUCIONES

### Opción A

**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm$^2$, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

La situación planteada se describe en el dibujo siguiente:




La tarjeta a utilizar tiene dimensiones $x + 10$ cm de largo e $y + 5$ cm de ancho.
La zona impresa (de color rojo) tiene dimensiones $x$ cm de largo e $y$ cm de ancho. Por lo que los 100 cm$^2$ nos proporcionan la igualdad:

$$x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

La función a maximizar es el área del rectángulo total (en negro):

$$\left.\begin{array}{r} A(x) = (x+10)(y+5) = xy + 5x + 10y + 50 \\ y = \dfrac{100}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = x\frac{100}{x} + 5x + 10\frac{100}{x} + 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 100 + 5x + \frac{1000}{x} + 50 = 5x + \frac{1000}{x} + 150$$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero, en busca del mínimo de la función área.

$$A(x) = 5x + \frac{1000}{x} + 150 \Rightarrow A'(x) = 5 - \frac{1000}{x^2}$$

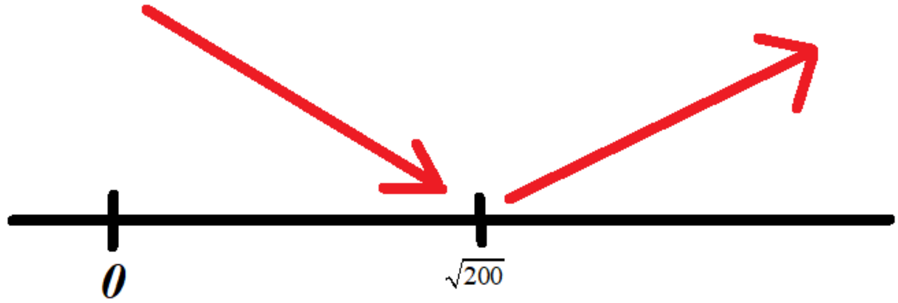
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 5 - \frac{1000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1000}{x^2} = 5 \Rightarrow 1000 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \sqrt{200} = 14{,}14\ cm$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz ya que estamos trabajando con longitudes.

Veamos como evoluciona el área antes de 14,14 cm y después de este valor.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{200}\right)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale $A'(10)=5-\frac{1000}{10^2}=5-10=-5<0$, la función decrece.
- En el intervalo $\left(\sqrt{200},+\infty\right)$ tomamos *x = 20* y la derivada vale $A'(20)=5-\frac{1000}{20^2}=2,5>0$, la función crece.

El área sigue el esquema del dibujo siguiente.




La función presenta un mínimo relativo en $x=\sqrt{200}$. Para este valor de *x* el correspondiente valor de *y* es $y=\frac{100}{\sqrt{200}}=\frac{100\sqrt{200}}{200}=\frac{\sqrt{200}}{2}=\frac{2\sqrt{50}}{2}=\sqrt{50}=7,07\ cm$.

Las dimensiones de la tarjeta que hacen mínimo el consumo de papel es *x + 10 = 24,14* cm de largo e *y + 5 = 12,07* cm de ancho.

**Ejercicio 2.- [2,5 puntos]** Determina la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Si $f''(x)=xe^x$ integrando obtendremos el valor de la derivada $f'(x)$ y volviendo a integrar obtendremos la expresión de la función *f(x)*.

$$f''(x)=xe^x \Rightarrow f'(x)=\int xe^x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=e^x dx\to v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right\}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+K$$

$$f'(x)=xe^x-e^x+K\Rightarrow f(x)=\int xe^x-e^x+Kdx=\int xe^x dx-\int e^x dx+\int Kdx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=\left(xe^x-e^x\right)-e^x+Kx+K'=xe^x-e^x-e^x+Kx+K'=xe^x-2e^x+Kx+K'$$

Hemos obtenido la función que nos piden y tiene la expresión $f(x)=xe^x-2e^x+Kx+K'$

Determinamos los valores de $K$ y $K'$ a partir de los datos proporcionados en el ejercicio.

Si la gráfica pasa por el origen de coordenadas entonces se cumple:

$$f(0)=0\Rightarrow f(0)=0e^0-2e^0+K\cdot 0+K'=-2+K'=0\Rightarrow \boxed{K'=2}$$

Al tener un extremo relativo en $x = 1$ entonces la derivada se anula en dicho valor.

$$f'(1)=0\Rightarrow f'(1)=1\cdot e^1-e^1+K=0\Rightarrow \boxed{K=0}$$

La función buscada tiene la expresión $f(x)=xe^x-2e^x+2$

**Ejercicio 3.-** Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

**a) [1,25 puntos]** Discute el sistema según los valores de *m*.
**b) [1,25 puntos]** Para *m = 2*, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

**a)** El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 0+3+6-0-2m+4-9 = -2m+4$$

Lo igualo a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m+4 = 0 \Rightarrow -2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2$$

Analizamos los dos casos diferentes que se nos pueden plantear.

**CASO 1.** $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas.
El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución)

**CASO 2.** $m = 2$.

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x \quad +3z = 5 \\ x+3y \quad = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lllll} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} & & & & \\ 2x & & +3z & = 5 & \\ -2x & -2y & -2z & = -4 & \\ \hline & -2y & +z & = 1 & \to \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} & & & & \\ x & +3y & & = 1 & \\ -x & -y & -z & = -2 & \\ \hline & 2y & -z & = -1 & \to \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -2y+z=1 \\ 2y-z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} = (-1)\text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \text{Elimino la ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ \boxed{z=1+2y} \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+1+2y=2 \Rightarrow \boxed{x=1-3y}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones) y las soluciones tienen la expresión: $x = 1 - 3t;\ y = t;\ z = 1 + 2t$ .

**b)** Para *m = 2* el sistema está resuelto en el apartado anterior y sus soluciones son:

$$x = 1 - 3t;\ y = t;\ z = 1 + 2t\ .$$

Para conseguir una solución con *z = 17* debe ser *1+2t = 17* → *t = 8.*

Sustituyendo tenemos la solución: $t = 8 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 24 = -23;\ y = 8;\ z = 17}$

**Ejercicio 4.-** Los puntos *A(1, 1, 1)* , *B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3)* son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.
**a) [1 punto]** Calcula el área del paralelogramo.
**b) [1 punto]** Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.
**c) [0,5 puntos]** Calcula las coordenadas del vértice *D*.

**a)** Dibujamos el paralelogramo para aclarar la situación.


El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores que forman sus lados. Tomamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,\ 1,\ 1) \\ B(2,\ 2,\ 2) \\ C(1,\ 3,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 2)-(1,\ 1,\ 1) = (1,1,1) \\ \overrightarrow{BC} = (1,\ 3,\ 3)-(2,\ 2,\ 2) = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = i - j + k + k - j - i = -2j + 2k = (0,-2,2)$$

$$\boxed{\text{Área de } ABCD = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2{,}8284\, u^2}$$

**b)** El plano que contiene el paralelogramo tiene como vector normal el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y contiene el punto *A(1,1,1)*.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = (0,-2,2) \\ A(1,1,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2y+2z+D=0 \\ A(1,1,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -2+2+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -2y+2z=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv y-z=0}$$

**c)** El punto *D* se obtiene sumando al punto *A* el vector $\overrightarrow{BC}$ ya que este vector y el $\overrightarrow{AD}$ son iguales.

$$D = A+\overrightarrow{BC} = (1,1,1)+(-1,1,1) = (0,2,2)$$

## Opción B

**Ejercicio 1.-** Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

**a) [2 puntos]** Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**b) [0,5 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.

**a)** Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

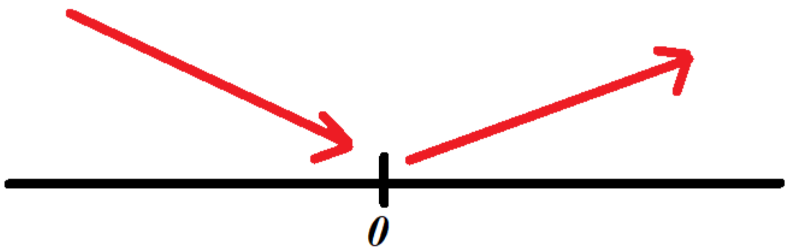
$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow e^x-e^{-x}=0\Rightarrow e^x=e^{-x}\Rightarrow e^x=\frac{1}{e^x}\Rightarrow e^{2x}=1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow\boxed{x=0}$$

Veamos cómo evoluciona la función antes y después de $x = 0$.

- En $(-\infty,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2}=-1{,}17<0$, la función decrece en el intervalo $(-\infty,0)$
- En $(0,+\infty)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=1{,}17>0$, la función crece en el intervalo $(0,+\infty)$

Reflejamos lo obtenido en el esquema siguiente.




La función decrece en el intervalo $(-\infty,0)$ y crece en el intervalo $(0,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$. Y la función toma el valor $f(0)=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=1$. El punto (0, 1) es el mínimo relativo.

**b)** La recta normal a la gráfica en $x = 0$ tiene ecuación $y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f'(0)=\frac{e^0-e^0}{2}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y-1=-\frac{1}{0}x\Rightarrow 0(y-1)=-x\Rightarrow\boxed{x=0}$$

La recta normal es la recta vertical $x = 0$. Es lógico, pues en $x = 0$ hay un mínimo relativo lo que implica que la recta tangente es horizontal y la normal es vertical.

**Ejercicio 2.-** Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje *OX*, la recta $y=x$, la gráfica $y=\frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

**a) [0,5 puntos]** Haz un esbozo del recinto descrito.

**b) [1,5 puntos]** Calcula el área del recinto.

**c) [0,5 puntos]** Si consideras la gráfica $y=\frac{1}{x}$ en lugar de $y=\frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?.

**a)** Veamos donde coinciden las gráficas.

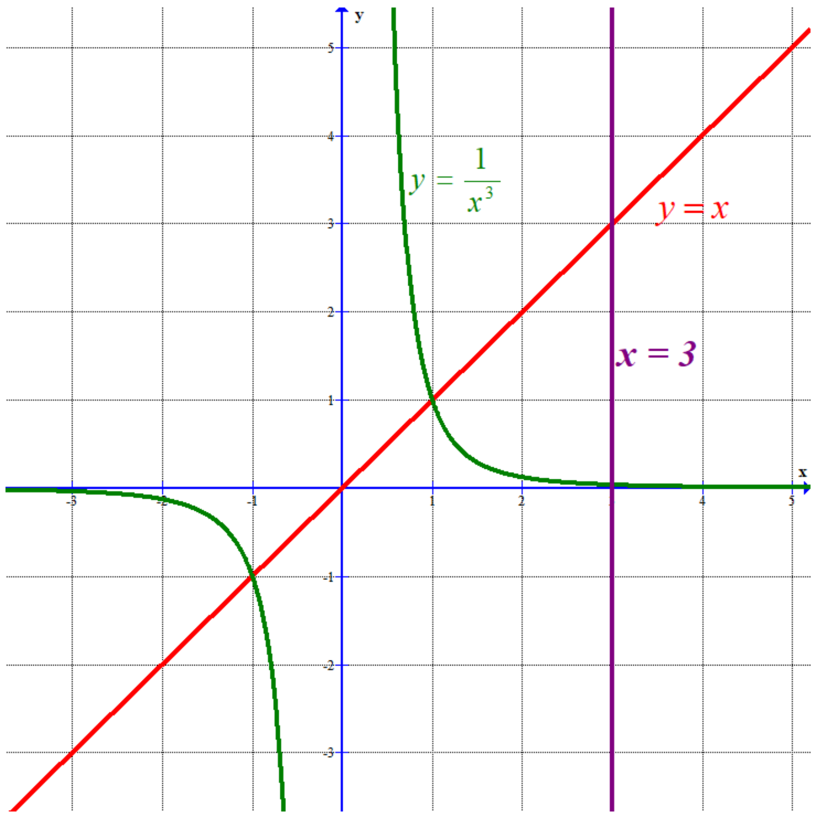
$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=\frac{1}{x^3} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{x^3} \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\sqrt[4]{1}=\pm 1$$

La función $y=\frac{1}{x^3}$ no existe para $x = 0$, por lo que presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores para la recta $y=x$ y otra para la curva $y=\frac{1}{x^3}$ y con ello dibujamos las gráficas.

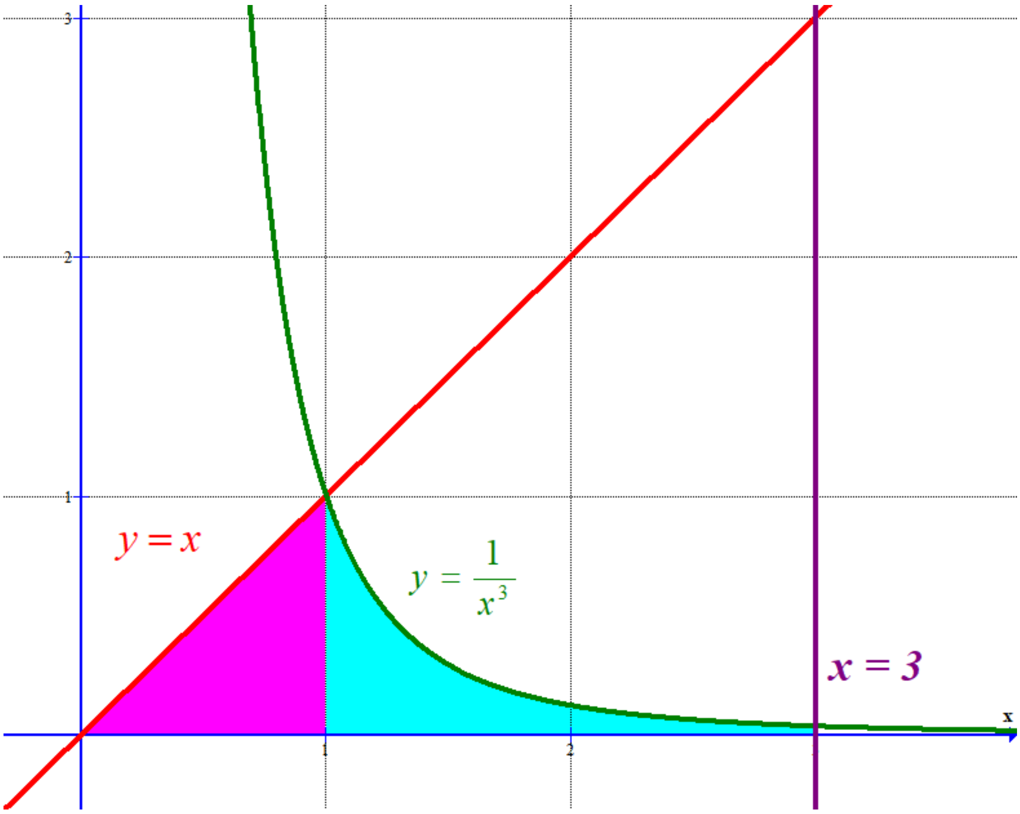
| $x$ | $y=\frac{1}{x^3}$ |
|---|---|
| $-3$ | $-0,012$ |
| $-2$ | $-0,125$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $0$ | *No existe* |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $0,125$ |
| $3$ | $0,012$ |

| $x$ | $y=x$ |
|---|---|
| $-1$ | $-1$ |
| $1$ | $1$ |




El recinto debe estar en el primer cuadrante y además limitado por el eje OX y las líneas roja, verde y violeta.

El recinto pedido lo dividimos en dos partes, la zona rosa tiene por encima a la recta $y = x$ y por debajo el eje *OX* y la zona azul claro tiene por encima la función $y=\frac{1}{x^3}$ y por debajo el eje *OX*.

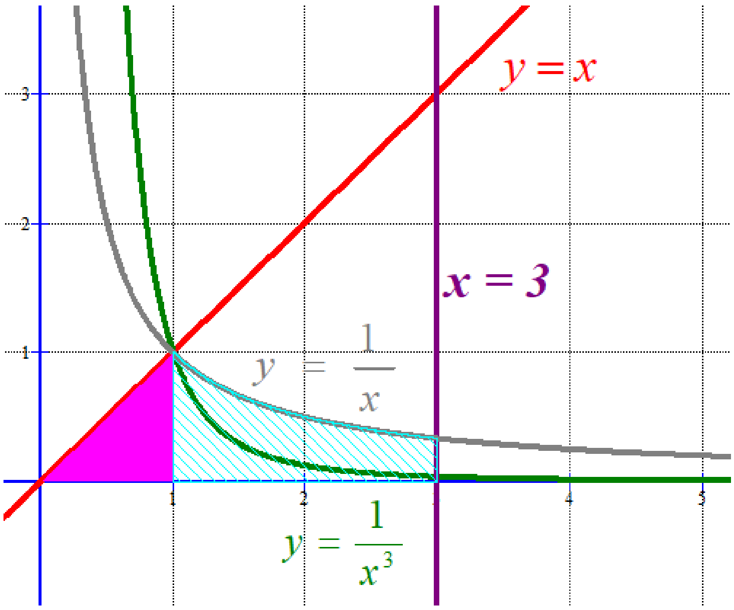



**b)** Para calcular el área total calculamos el área del recinto rosa y del azul y los sumamos.
Observando el dibujo el recinto rosa ocupa medio cuadrado, por lo que tiene área = 0,5 u$^2$.
El recinto azul lo calculamos haciendo uso de la integral definida de $x = 1$ hasta $x = 3$ de la función $y = \frac{1}{x^3}$ .

$$\int_1^3 \frac{1}{x^3} dx = \int_1^3 x^{-3} dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = \left[-\frac{1}{2\cdot 3^2}\right] - \left[-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right] = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} = 0,444$$

***Área total = 0,5 + 0,444 = 0,944 u$^2$***

**c)** Dibujamos la función $y = \frac{1}{x}$ y dibujamos el nuevo recinto.




El área del nuevo recinto sería mayor que el área del recinto inicial.

**Ejercicio 3.-** Considera $A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

**a) [1,5 puntos]** Discute el rango de *A* según los valores de *k*.

**b) [1 punto]** Para *k = 1*, calcula el determinante de $2\left(A^t A^{-1}\right)^{2017}$, siendo $A^t$ la traspuesta de *A*.

a) ¿El rango de A es 3?

Calculamos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix}=k^2(k+1)+k(k+1)^2=k(k+1)\left[k+(k+1)\right]=k(k+1)[2k+1]$$

$$|A|=0\Rightarrow k(k+1)[2k+1]=0\Rightarrow\begin{cases} k=0 \\ k+1=0\to k=-1 \\ 2k+1=0\to 2k=-1\to k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Nos planteamos cuatro situaciones distintas.

CASO 1. $k\neq 0, k\neq -1 \ y \ k\neq -\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de *A* es no nulo y el rango de *A* es 3.

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de *A* es nulo y su rango es menor que 3.

¿El rango de *A* es 2?

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde la fila 1ª es nula y la 2ª y 3ª columna son iguales. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 3ª y su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de *A* es 2.

CASO 3. $k=-1$

En este caso el determinante de *A* es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde la fila 3ª es nula y la 1ª y 3ª columna son iguales. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª y su determinante es $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de *A* es 2.

CASO 4. $k=-\dfrac{1}{2}$

En este caso el determinante de *A* es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de *A* es 2?

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª y su determinante es $\begin{vmatrix}-1/2 & 0\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=1/4\neq 0$. El rango de *A* es 2.

Si $k\neq 0, k\neq -1\ y\ k\neq -\dfrac{1}{2}$ el rango de *A* es 3 y si $k=-\dfrac{1}{2}$, $k=-1$ o $k=0$ el rango de *A* es 2.

b) Para *k = 1* la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Si *B* es una matriz cuadrada de orden 3 se cumple que $|2B|=2^3|B|$

Como la matriz $\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}$ es una matriz cuadrada de orden 3 el determinante

$$\left|2\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}\right|=2^3\left|\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}\right|$$

Si *B* y *C* son dos matrices se cumple que $|B\cdot C|=|B|\cdot|C|$

También se cumple que $\left|B^{2017}\right|=|B\cdot B\cdot\ldots\cdot B|=|B|\cdot|B|\cdot\ldots\cdot|B|=|B|^{2017}$

Aplicándolo a nuestro ejercicio tenemos que:

$$\left|2\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}\right|=2^3\left|\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}\right|=8\left|A^tA^{-1}\right|^{2017}=8\left(\left|A^t\right|\cdot\left|A^{-1}\right|\right)^{2017}$$

Como $\left|A^t\right|=|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=2+4=6$ y $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{6}$ tenemos que:

$$\left|2\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}\right|=8\left(\left|A^t\right|\left|A^{-1}\right|\right)^{2017}=8\left(6\cdot\frac{1}{6}\right)^{2017}=8$$

**Ejercicio 4.-** Considera el punto *P(0, 1, 1)* y la recta *r* dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=\ \ 2 \end{cases}$

**a) [1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.
**b) [1,25 puntos]** Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.

**a)** Determinamos un punto y el vector director de la recta *r*.

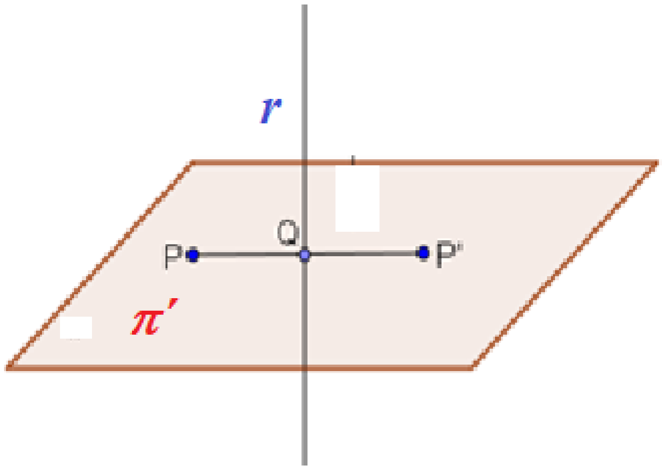
$$r \equiv \begin{cases} x-2y=-5 \\ z=\ \ 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-5+2y \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2,1,0) \\ P_r(-5,0,2) \end{cases}$$

El plano π que contiene la recta y el punto *P* tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{PP_r}$.

$$\pi \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2,1,0) \\ \overrightarrow{PP_r}=(-5,0,2)-(0,1,1)=(-5,-1,1) \\ P(0,1,1)\in\pi \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv x-2z+2+5z-5-2y+2=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-2y+3z-1=0}$$

**b)** Para obtener el punto *P´* simétrico de *P* respecto de *r* seguimos los pasos indicados en el dibujo.




Hallamos el plano $\pi´$ perpendicular a la recta *r* que pasa por *P*. Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$\pi´ \equiv \begin{cases} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,0) \\ P\ (0,1,1)\in\pi´ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi´ \equiv 2x+y+D=0 \\ P\ (0,1,1)\in\pi´ \end{cases} \Rightarrow 0+1+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \boxed{\pi´ \equiv 2x+y-1=0}$$

Hallamos las coordenadas del punto *Q* de corte de la recta *r* y del plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} \pi´ \equiv 2x+y-1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x-2y=-5 \\ z=\ \ 2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi´ \equiv 2x+y-1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2y-5 \\ \boxed{z=\ \ 2} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2y-5)+y-1=0 \Rightarrow 4y-10+y-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 11 \Rightarrow \boxed{y = \frac{11}{5}} \Rightarrow \boxed{x = 2\frac{11}{5} - 5 = -\frac{3}{5}} \Rightarrow Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$$

El punto $Q$ es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, si llamamos $P'(a,b,c)$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) \\ P(0,1,1) \\ P'(a,b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) = \frac{(0,1,1)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow \left(-\frac{6}{5}, \frac{22}{5}, 4\right) = (0,1,1)+(a,b,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{22}{5}, 4\right) - (0,1,1) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$$

El punto simétrico de $P$ respecto de $r$ tiene coordenadas $P'\left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$