PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de *f* pasa por el punto (1,1).

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=\left|x^2-2x\right|$.

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) [1’25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{cases}$

a) [1’75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro *m*.

b) [0’75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$.

Ejercicio 4.- Considera los puntos *P(1,0,–1)*, *Q(2,1,1)* y la recta *r* dada por $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2}$.

a) [1’25 puntos] Determina el punto simétrico de *P* respecto a *r*.

b) [1’25 puntos] Calcula el punto de *r* que equidista de *P* y *Q*.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017-2018	**MATEMÁTICAS II**

Instrucciones: **a) Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2’5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3-kx^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x>1 \end{cases}$$ es derivable

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$ y $f(x)=3-x^2$

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de *g*. Determina el punto de tangencia con la gráfica de *g*.

b) [0’75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de *f* y *g*. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) [0’75 punto] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 3.-

a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Ejercicio 4.- Considera el punto *P(2,–1, 3)* y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.

a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de *P* a π.

SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto (1,1).

Calculemos la derivada de la función.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

En $x=1$ se anula la derivada $\Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=-3}$

Como $x = 1$ no es extremo relativo la derivada segunda se anula en $x = 1$.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$$

$x=1$ no es extremo $\Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow 6\cdot 1+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

La gráfica pasa por el punto (1, 1).

$$f(1)=1 \Rightarrow 1=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \Rightarrow \boxed{a+b+c=0}$$

Juntamos las tres ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ \boxed{a=-3} \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-3)+b=-3 \\ -3+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6+b=-3 \\ b+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=3} \\ b+c=3 \end{cases} \Rightarrow 3+c=3 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 3$ y $c = 0$.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=\left|x^2-2x\right|$.

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

a) La función $f(x)=6x-x^2$ es una parábola y la función $g(x)=\left|x^2-2x\right|$ es una función valor absoluto que se expresa como función a trozos:

$$x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ ó\\ x=2\end{cases}\Rightarrow g(x)=\left|x^2-2x\right|=\begin{cases}x^2-2x & si \quad x<0\\ -\left(x^2-2x\right) & si \quad 0\le x\le 2\\ x^2-2x & si \quad 2<x\end{cases}$$

Igualamos las funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\left|x^2-2x\right|=6x-x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x=6x-x^2\Rightarrow 2x^2-8x=0\Rightarrow 2x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ ó\\ x-4=0\Rightarrow\boxed{x=4}\end{cases}\\ ó\\ -\left(x^2-2x\right)=6x-x^2\Rightarrow -x^2+2x=6x-x^2\Rightarrow 0=4x\Rightarrow\boxed{x=0}\end{cases}$$

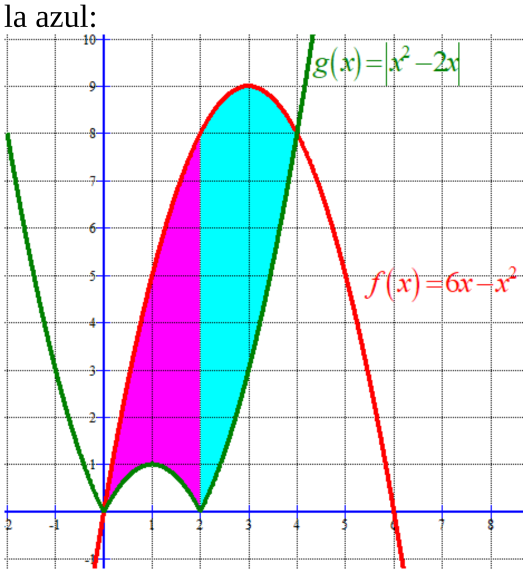
Se cortan en $x = 0$ y en $x = 4$.

Hacemos una tabla de valores para cada una de las funciones entre 0 y 4.

x	$y=f(x)=6x-x^2$
0	0
1	$6-1=5$
2	$12-4=8$
3	$18-9=9$
4	$24-16=8$

x	$y=g(x)=\left\|x^2-2x\right\|$
0	$\left\|0\right\|=0$
1	$\left\|1-2\right\|=1$
2	$\left\|4-4\right\|=0$
3	$\left\|9-6\right\|=3$
4	$\left\|16-8\right\|=8$

El recinto lo dividimos en dos partes, la zona rosa y la azul:



a)

Calculamos el valor del área del recinto de color rosa, limitada por las funciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x| = 2x - x^2 \; si \; 0 < x < 2$.

$$\text{Área recinto rosa} = \int_0^2 6x - x^2 - (2x - x^2)\,dx = \int_0^2 6x - x^2 - 2x + x^2 dx = \int_0^2 4x dx =$$

$$= \left[2x^2\right]_0^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2 = 8\,u^2$$

Calculamos el valor del área del recinto de color azul, limitada por las funciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x| = x^2 - 2x \; si \; x > 2$.

$$\text{Área recinto azul} = \int_2^4 6x - x^2 - (x^2 - 2x)\,dx = \int_2^4 6x - x^2 - x^2 + 2x dx = \int_2^4 -2x^2 + 8x dx =$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_2^4 = \left[-2\frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2\right] - \left[-2\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2^2\right] = -\frac{128}{3} + 64 + \frac{16}{3} - 16 = \frac{32}{3} = 10,66\,u^2$$

El área total es la suma del área de ambas regiones: Área total = 8 + 10,66 = 18,66 u^2

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+\ y\ +\ \ z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro *m*.
b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para *m* = *–2*.

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix} \text{con determinante}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix}=3m+3+4+4m+12-(2m+6+6m+6+4)=-m+3$$

Lo igualamos a cero → $-m+3=0 \Rightarrow m=3$

Analizamos el sistema en los dos casos siguientes

CASO 1. $m\neq 3$
Para $m\neq 3$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3 e igual que el número de incógnitas.
El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución).

CASO 2. $m=3$
En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} x+2y+6z=3 \\ x+\ y+z=9 \\ 2x+4y+12z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Simplificamos la ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{dividiendola entre 2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+6z=3 \\ x+\ y+z=9 \\ x+2y+6z=4 \end{cases}$$

Como observamos la ecuación 1ª y la 3ª tienen el primer miembro de la igualdad idénticos y el segundo distinto, esto plantea un sistema de ecuaciones imposible y por tanto el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

b) Para *m* = *–2* estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado, podemos resolverlo utilizando el método de Cramer.

Para *m* = *–2* el sistema queda: $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+\ y+z=-6 \\ 2x+4y-3z=8 \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-9+16-24-8-36-12}{-3+4+4-2+6-4}=\frac{-73}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\\ 2 & 8 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}}=\frac{18+6+\cancel{8}+12+9-\cancel{8}}{5}=\frac{45}{5}=9$$

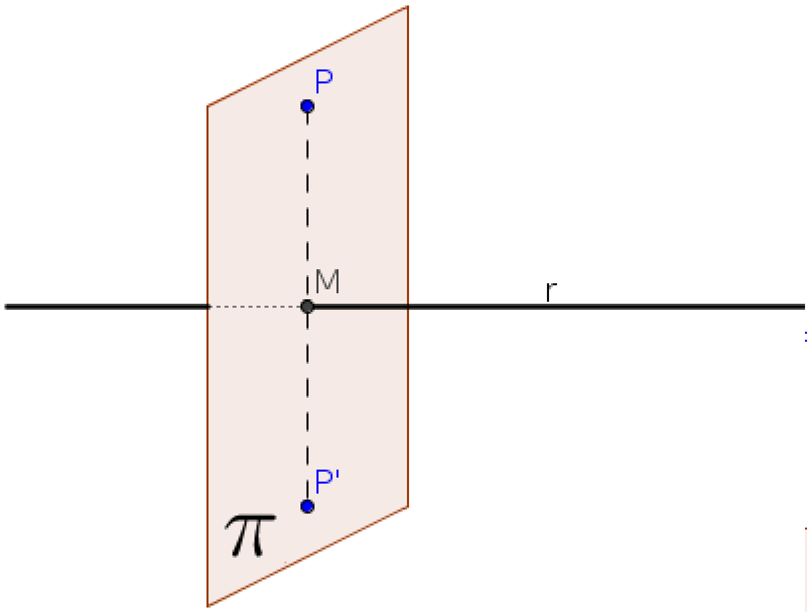
$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -6\\ 2 & 4 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}}=\frac{8-\cancel{24}+12-6-16+\cancel{24}}{5}=\frac{-2}{5}$$

La solución del sistema es $x=\frac{-73}{5};\quad y=9;\quad z=\frac{-2}{5}$

Ejercicio 4.- Considera los puntos *P(1,0,–1)*, *Q(2,1,1)* y la recta *r* dada por $x-5=y=\frac{z+2}{-2}$.

a) [1’25 puntos] Determina el punto simétrico de *P* respecto a *r*.
b) [1’25 puntos] Calcula el punto de *r* que equidista de *P* y *Q*.

Para calcular las coordenadas del punto *P´* simétrico de *P* respecto de la recta *r* procederemos como indica el dibujo:



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(1, 0, –1)

$$r\equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v_r}=(1,1,-2)\\ P_r(5,0,-2)\end{cases}$$

$$\vec{n}=\vec{v_r}=(1,1,-2)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y-2z+D=0\\ P(1,0,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 1+0+2+D=0\Rightarrow D=-3$$

$$\pi\equiv x+y-2z-3=0$$

Hallamos el punto *M* de corte entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}\vec{v_r}=(1,1,-2)\\ P_r(5,0,-2)\end{cases}\\ \pi\equiv x+y-2z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=5+t\\ y=t\\ z=-2-2t\end{cases}\\ \pi\equiv x+y-2z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow(5+t)+t-2(-2-2t)-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+t+t+4+4t-3=0\Rightarrow 6t+6=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow\begin{cases}x=5-1=4\\ y=-1\\ z=-2+2=0\end{cases}\Rightarrow M(4,-1,0)$$

Si *P´* tiene coordenadas *(a, b, c)* como el punto *M* es el punto medio del segmento *PP´* tenemos que se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} P'(a,b,c) \\ P(1,0,-1) \\ M(4,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow (4,-1,0) = \frac{(a,b,c)+(1,0,-1)}{2} \Rightarrow (8,-2,0) = (a,b,c)+(1,0,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c) = (8,-2,0)-(1,0,-1) = (7,-2,1)$$

El punto simétrico de *P(1,0,–1)* respecto de la recta *r* tiene coordenadas *P´(7, –2, 1)*.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3-kx^2 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable

Para ser derivable debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 1$. Los límites laterales deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3-kx^2 = 3-k \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{kx} = \dfrac{2}{k} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{k} = 3-k \Rightarrow 2 = 3k-k^2 \Rightarrow k^2-3k+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = \boxed{2=k} \\ \dfrac{3-1}{2} = \boxed{1=k} \end{cases}$$

Calculamos la derivada de la función en $\mathbb{R}-\{1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 3-kx^2 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x < 1 \\ -\dfrac{2}{kx^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1^-) = -2k \\ f\,'(1^+) = -\dfrac{2}{k} \\ f\,'(1^-) = f\,'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{k} = -2k \Rightarrow 2 = 2k^2 \Rightarrow 1 = k^2 \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Para que se cumplan las dos condiciones y la función sea derivable el valor de *k* debe ser 1.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$ y $f(x)=3-x^2$

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de *g*. Determina el punto de tangencia con la gráfica de *g*.

b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de *f* y *g*. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) [0'75 punto] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a) La ecuación de la recta tangente a *f* en *x = 1* es $y-f(1)=f\,'(1)(x-1)$

$$f(x)=3-x^2\Rightarrow f\,'(x)=-2x$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=3-1=2 \\ f\,'(1)=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow y-2=-2(x-1)\Rightarrow y-2=-2x+2\Rightarrow \boxed{y=-2x+4}$$

Para que sea tangente a la función *g* debemos buscar el punto de la gráfica de *g* que tiene derivada igual a –2.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=-\dfrac{x^2}{4}\Rightarrow g\,'(x)=-\dfrac{2x}{4}=-\dfrac{x}{2} \\ g\,'(x)=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{x}{2}=-2\Rightarrow -x=-4\Rightarrow x=4$$

Calculamos la recta tangente a la gráfica de *g* en *x = 4* y comprobamos si es igual a la recta tangente obtenida anteriormente.

La ecuación de la recta tangente a *g* en *x = 4* es $y-g(4)=g\,'(4)(x-4)$

$$\left.\begin{array}{r} g\,'(x)=-\dfrac{x}{2}\Rightarrow g\,'(4)=-2 \\ g\,(4)=-\dfrac{4^2}{4}=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow y-(-4)=-2(x-4)\Rightarrow y+4=-2x+8\Rightarrow \boxed{y=-2x+4}$$

Como se comprueba las rectas tangentes a *f* en *x =1* y a *g* en *x = 4* son iguales.

b) Hallamos los puntos de corte de la recta con cada una de las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3-x^2 \\ y=-2x+4 \end{array}\right\}\Rightarrow -2x+4=3-x^2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1$$

La función *f(x)* solo corta a la recta tangente en *x = 1*

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=-\dfrac{x^2}{4} \\ y=-2x+4 \end{array}\right\}\Rightarrow -2x+4=-\frac{x^2}{4}\Rightarrow -8x+16=-x^2\Rightarrow x^2-8x+16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(16)}}{2(1)}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{2}=4$$

La función *g(x)* solo corta a la recta tangente en *x = 4*

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 3-x^2=-\frac{x^2}{4}\Rightarrow 12-4x^2=-x^2\Rightarrow -3x^2=-12\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

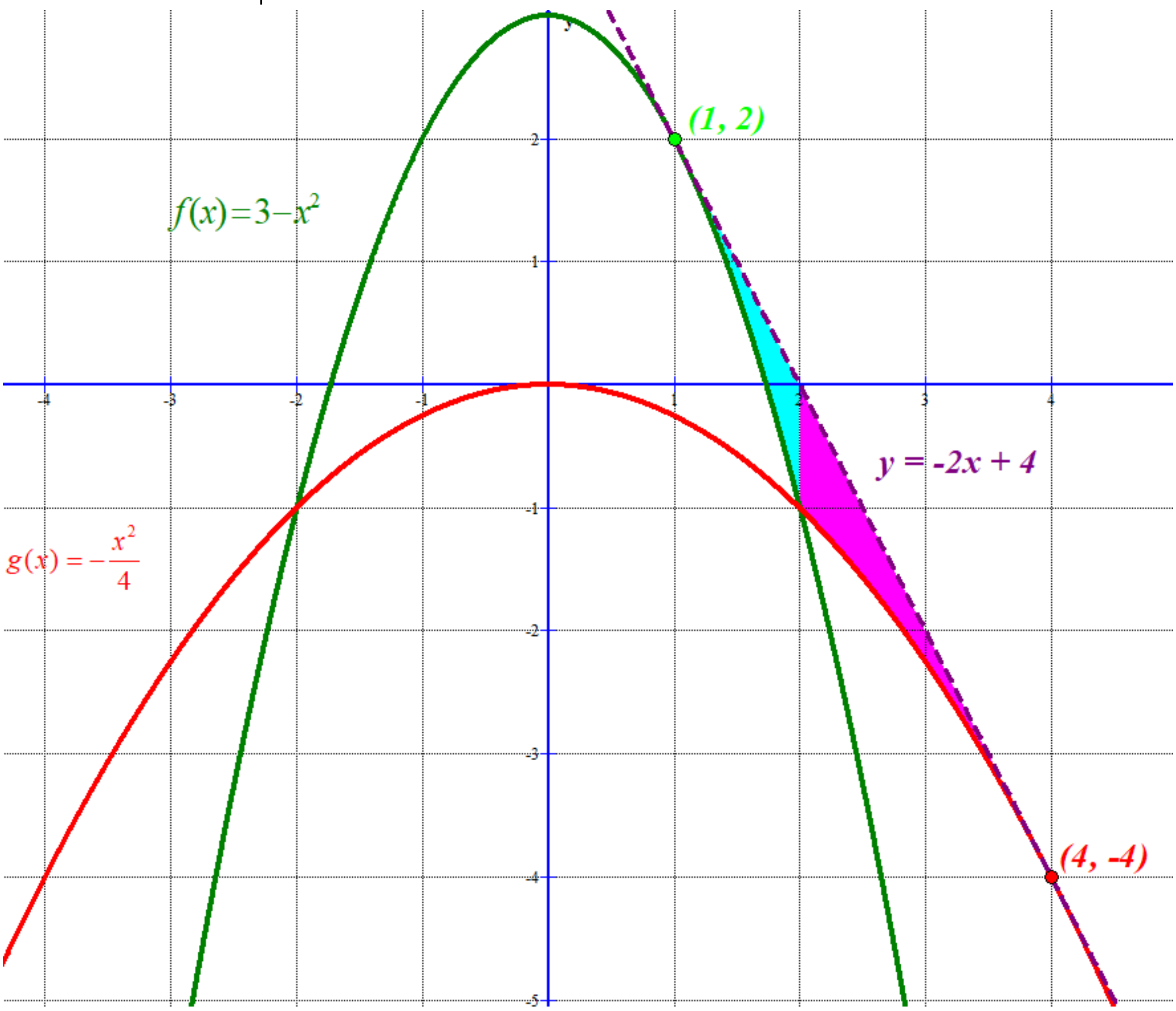
Las funciones *f(x) y g(x)* solo coinciden en *x = –2* y en *x = 2*

Dibujamos la gráfica de las funciones y la recta tangente realizando previamente una tabla de valores entre –2 y 4.

x	$g(x)=-\frac{x^2}{4}$
-2	-1
-1	$-0,25$
0	0
1	$-0,25$
2	-1
4	-4

x	$f(x)=3-x^2$
-2	-1
-1	2
0	3
1	2
2	-1
4	-13

x	$y=-2x+4$
0	4
1	2
2	0
3	-2
4	-4



c) Observando el dibujo del recinto este es pequeño y nos debe salir un área de aproximadamente 1 unidad cuadrada.
Lo dividimos en dos partes, calculamos el área de cada parte y las sumamos para obtener el área total.
El área del recinto azul es una integral definida entre 1 y 2 de la función *y = –2x+4* menos $f(x)=3-x^2$.

$$\text{Área azul} = \int_1^2 -2x+4-\left(3-x^2\right)dx = \int_1^2 -2x+4-3+x^2dx = \int_1^2 x^2-2x+1dx =$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3}-2^2+2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-1^2+1\right]=\frac{8}{3}-4+2-\frac{1}{3}+1-1=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}u^2$$

El área del recinto rosa es una integral definida entre 2 y 4 de la función $y = -2x+4$ menos $g(x) = -\frac{x^2}{4}$

$$\text{Área rosa} = \int_2^4 -2x+4-\left(-\frac{x^2}{4}\right)dx = \int_2^4 -2x+4+\frac{x^2}{4}dx = \int_2^4 \frac{x^2}{4}-2x+4dx = \left[\frac{x^3}{12}-x^2+4x\right]_2^4 =$$

$$=\left[\frac{4^3}{12}-4^2+4\cdot 4\right]-\left[\frac{2^3}{12}-2^2+4\cdot 2\right]=\frac{64}{12}-16+16-\frac{8}{12}+4-8=\frac{56}{12}-4=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}u^2$$

El área total es $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\,u^2$

Ejercicio 3.-
a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a) Llamemos x = número de monedas de 50 cts, y = nº de monedas de 1 euro, z = nº monedas de 2 euros.
Planteamos un sistema de ecuaciones con las condiciones ofrecidas en el ejercicio.

"*se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas*" → $x+y+z=30$
"*tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas*" → $y=x+z$
"*hacer un pago de 34,50 euros*" → $0,5x+y+2z=34,5$

Formamos un sistema con las tres ecuaciones y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ 0,5x+y+2z=34,5 \\ y=x+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Para no manejar decimales} \\ \text{multiplico por 2 la 2ª ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ x+2y+4z=69 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} -x & +y & -z & =0 \\ x & +y & +z & =30 \\ \hline & 2y & & =30 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ x+2y+4z=69 \\ 2y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª } - \text{ Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} x & +2y & +4z & =69 \\ -x & -y & -z & =-30 \\ \hline & y & +3z & =39 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ y+3z=39 \\ \boxed{y=15} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+15+z=30 \\ 15+3z=39 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=15 \\ 3z=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=15 \\ \boxed{z=8} \end{array}\right\} \Rightarrow x+8=15 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

Solo hay una forma de conseguirlo, con 7 monedas de 50 cts, 15 de 1 euro y 8 de 2 euros.

b) Cambiamos la ecuación correspondiente y volvemos a resolver.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ 0,5x+y+2z=35 \\ y=x+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Para no manejar decimales} \\ \text{multiplico por 2 la 2ª ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ x+2y+4z=70 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} -x & +y & -z & =0 \\ x & +y & +z & =30 \\ \hline & 2y & & =30 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ x+2y+4z=70 \\ 2y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

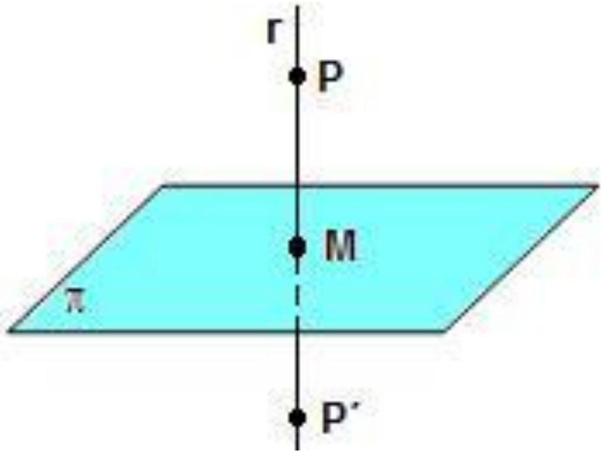
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} x & +2y & +4z & =70 \\ -x & -y & -z & =-30 \\ \hline & y & +3z & =40 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ y+3z=40 \\ \boxed{y=15} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+15+z=30 \\ 15+3z=40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=15 \\ 3z=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=15 \\ \boxed{z=\frac{25}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{25}{3}=15 \Rightarrow x=15-\frac{25}{3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{20}{3}}$$

No es posible, pues la solución da un número decimal de monedas de 50 cts y de 2 euros.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.
a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π.
b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de P a π.

a) Para obtener las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de un plano π seguiremos el procedimiento descrito en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $3x+2y+z=5$ y que pasa por P. Por ser perpendicular el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 3x+2y+z=5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(3,2,1)\\ P(2,-1,3)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{l}x=2+3t\\ y=-1+2t\\ z=3+t\end{array}\right\}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 3x+2y+z=5\\ r \equiv \left.\begin{array}{l}x=2+3t\\ y=-1+2t\\ z=3+t\end{array}\right\}\end{array}\right\} \Rightarrow 3(2+3t)+2(-1+2t)+3+t=5 \Rightarrow 6+9t-2+4t+3+t=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14t=-2 \Rightarrow t=\frac{-2}{14}=-\frac{1}{7} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=2+3\left(-\frac{1}{7}\right)=2-\frac{3}{7}=\frac{11}{7}\\ y=-1+2\left(-\frac{1}{7}\right)=-1-\frac{2}{7}=-\frac{9}{7}\\ z=3-\frac{1}{7}=\frac{20}{7}\end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)$$

Llamemos a las coordenadas del punto $P´(a,b,c)$. El punto M es el punto medio del segmento $PP´$ por lo que se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right) \\ P(2,-1,3) \\ P'(a,b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)=\frac{(2,-1,3)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)=(2,-1,3)+(a,b,c) \Rightarrow \left(\frac{22}{7},-\frac{18}{7},\frac{40}{7}\right)-(2,-1,3)=(a,b,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=\left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$$

El punto P' tiene coordenadas $\left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$

b) La distancia de P al plano π es el módulo del vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)-(2,-1,3)=\left(-\frac{3}{7},-\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2+\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{14}{49}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

La distancia es $\frac{\sqrt{14}}{7}=0,53\,u$