PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Determina *a*, *b* y *c* sabiendo que *f* es continua, alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente *2*.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función *f* definida por $f(x)=ax\ln(x)-bx \quad para \quad x>0$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano). Determina *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en $x=1$ y que

$$\int_1^2 f(x)dx=8\ln(2)-9\,.$$

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de *a*, *b* y *c* para los que las matrices *A* y *B* conmutan.

b) [1 punto] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.

c) [0,75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de *A*.

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3} \qquad y \qquad s\equiv\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de *r* y *s*.

b) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre *r* y *s*.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función *f* definida por $f(x) = a\ln\left(x\right) + bx^2 + x \quad para \quad x > 0$, donde *ln* denota logaritmo neperiano.

a) **[1,5 puntos]** Halla *a* y *b* sabiendo que *f* tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) **[1 punto]** ¿Qué tipo de extremos tiene *f* en $x = 1$ y en $x = 2$?

Ejercicio 2.- Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) **[0,75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y = -2ex$.

b) **[0,5 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.

c) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad y - \quad z = m \\ x + my + z = m \end{cases},$$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) **[1 punto]** Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}.$$

a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de *m* y *n* para que *r* y *s* se cortan perpendicularmente.

b) **[1 punto]** Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a *r* y a *s*.

SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Determina *a, b* y *c* sabiendo que *f* es continua, alcanza un máximo relativo en *x = –1* y la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = –2* tiene pendiente *2*.

Para que la función sea continua debe serlo en *x = 0* y para ello deben coincidir los límites laterales.

Límite por la izquierda $(x<0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ax^2+bx+c=c$$

Límite por la derecha $(x>0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}=\frac{1-1-0}{0-sen0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(LHôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{1+1-2}{1-\cos 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(LHôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{0+senx}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(LHôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \boxed{c=2}$

Si tiene un máximo relativo en *x = –1* la derivada debe de anularse en ese punto.

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad si \quad x\le 0\Rightarrow f\,'(x)=2ax+b$$

$$x=-1\Rightarrow\begin{cases} f\,'(-1)=2a(-1)+b=-2a+b \\ f\,'(-1)=0 \end{cases}\Rightarrow -2a+b=0\Rightarrow \boxed{b=2a}$$

Si la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = –2* tiene pendiente *2* significa que la derivada en *x = –2* vale *2*.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad si \quad x \leq 0 \Rightarrow f\,'(x) = 2ax + b$$

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} f\,'(-2) = 2a(-2) + b = -4a + b \\ f\,'(-2) = 2 \end{cases} \Rightarrow -4a + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 4a + 2}$$

Juntamos las dos ecuaciones y hallamos los valores de a y b.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2a \\ b = 4a + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 4a + 2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{-2} = -1} \Rightarrow \boxed{b = 2\cdot(-1) = -2}$$

Los valores obtenidos son ***a* = –1, *b* = –2** y ***c* = 2**.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función *f* definida por $f(x)=ax\ln(x)-bx \quad para \quad x>0$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano). Determina *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en *x = 1* y que

$$\int_1^2 f(x)dx = 8\ln(2)-9 .$$

Si la función tiene un extremo relativo en *x = 1* significa que su derivada se anula en dicho valor.

$$f(x)=ax\ln(x)-bx \quad para \quad x>0 \Rightarrow f\,'(x)=a\ln(x)+ax\cdot\frac{1}{x}-b=a\ln(x)+a-b$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1)=a\ln(1)+a-b=a-b \\ f\,'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$$

Calculamos la integral indefinida y después la definida.

$$\int f(x)dx=\int ax\ln x-axdx=\int ax\ln xdx-\int axdx=\int ax\ln xdx-a\frac{x^2}{2}=\ldots$$

$$\int ax\ln xdx=a\int x\ln xdx=\left\{\begin{array}{l} Integración \\ por\ \ partes \\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{array}\right\}=a\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx\right)=$$

$$=a\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx\right)=a\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)=a\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$\ldots=a\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)-a\frac{x^2}{2}=a\frac{x^2}{2}\ln x-a\frac{x^2}{4}-a\frac{x^2}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\left[a\frac{x^2}{2}\ln x-a\frac{x^2}{4}-a\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[a\frac{2^2}{2}\ln 2-a\frac{2^2}{4}-a\frac{2^2}{2}\right]-\left[a\frac{1^2}{2}\ln 1-a\frac{1^2}{4}-a\frac{1^2}{2}\right]=$$

$$=2a\ln 2-a-2a-\left[0-\frac{a}{4}-\frac{a}{2}\right]=2a\ln 2-\frac{4a}{4}-\frac{8a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{2a}{4}=2a\ln 2-\frac{9a}{4}=\frac{8a\ln 2-9a}{4}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=8\ln(2)-9\Rightarrow\frac{8a\ln 2-9a}{4}=8\ln 2-9\Rightarrow 8a\ln 2-9a=32\ln 2-36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(8\ln 2-9)=32\ln 2-36\Rightarrow a=\frac{32\ln 2-36}{8\ln 2-9}=\frac{4(8\ln 2-9)}{8\ln 2-9}=4$$

Los valores buscados son ***a* = *b* = 4**

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

a) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de *a*, *b* y *c* para los que las matrices *A* y *B* conmutan.
b) [1 punto] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.
c) [0,75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de *A*.

a) Debe cumplirse que A · B = B · A

$$AB=BA \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ a & b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -b & a\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-1=c\\ 0=-b\\ 0=a\\ a=0\\ b=0\\ c=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l}a=0\\ b=0\\ c=-1\end{array}\right\}}$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=Id_3$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=A$$

$$A^4=A^3A=AA=A^2=Id_3$$

Si el exponente "*n*" es par la potencia $A^n = Id_3$.
Si el exponente "*n*" es impar la potencia $A^n = A$.

Como 2017 es impar se tiene que $A^{2017} = A$.
Como 2018 es par se tiene que $A^{2018} = Id_3$

c) La matriz inversa de A existe si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-(-1+0+0)=1\neq 0$$

Existe la inversa y la calculamos (aunque si miramos el resultado del apartado b) podemos decir que su inversa es la misma matriz *A*, pues $A \cdot A = A^2 = Id_3$).

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de *r* y *s*.
b) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre *r* y *s*.

a) Obtengamos los vectores directores y un punto de ambas rectas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) \\ P_r(-1,0,-1) \end{matrix}\right\}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3y-5 \\ 2z=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y-5}{2} \\ z=\dfrac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5}{2}+\dfrac{3}{2}y \\ y=y \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow$$

Hallamos dos puntos de la recta s y de ahi obtenemos el vector director.

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x=\dfrac{-5}{2}+\dfrac{3}{2}=-1 \\ y=1 \to y=1 \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_s(-1,1,1) \\ \left.\begin{matrix} x=\dfrac{-5}{2}-\dfrac{3}{2}=-4 \\ y=-1 \to y=-1 \\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q_s(-4,-1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{P_sQ_s} = (-4,-1,0)-(-1,1,1) = (-3,-2,-1) \\ P_s(-1,1,1) \end{matrix}\right\}$$

Para ser paralelas o coincidentes los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-3,-2,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿\frac{2}{-3} = \frac{1}{-2} = \frac{3}{-1}? \quad \text{¡NO ES CIERTO!}$$

Por lo que no son paralelas ni coincidentes. ¿Son secantes o se cruzan?

Calculamos el producto mixto de los dos vectores directores y del vector que une un punto de una recta con un punto de la otra. Si es nulo son secantes y en caso contrario se cruzan.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-3,-2,-1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,1,1)-(-1,0,-1) = (0,1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8+0-9-(0-6-2) = -9 \neq 0$$

Las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) La distancia se obtiene con la división entre el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores anteriores $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]$ y el área del paralelogramo definido por los vectores directores.

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto obtenido en el apartado anterior: $Volumen = \left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right| = |-9| = 9\ u^3$.

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-3,-2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -i - 9j - 4k + 3k + 2j + 6i = 5i - 7j - k = (5,-7,-1)$$

$$Área = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| = |(5,-7,-1)| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{75}\ u^2$$

Por lo que aplicando la fórmula tenemos que:

$$\boxed{\text{Distancia}(r,s)} = \frac{Volumen}{Área} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \boxed{\frac{9}{\sqrt{75}} = 1,039\ u}$$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función *f* definida por $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x \quad para \quad x > 0$, donde *ln* denota logaritmo neperiano.

a) **[1,5 puntos]** Halla *a* y *b* sabiendo que *f* tiene extremos relativos en *x = 1* y en *x = 2.*

b) **[1 punto]** ¿Qué tipo de extremos tiene *f* en *x = 1* y en *x = 2?*

a) Si la función presenta un extremo relativo en *x = 1* entonces la derivada se anula en *x = 1.*

$$f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x \quad \Rightarrow f\,'(x) = a\frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$x = 1 \Rightarrow f\,'(1) = 0 = a\frac{1}{1} + 2b\cdot 1 + 1 = a + 2b + 1 \Rightarrow a = -1 - 2b$$

Si la función presenta un extremo relativo en *x = 2* entonces la derivada se anula en *x = 2.*

$$f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x \quad \Rightarrow f\,'(x) = a\frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f\,'(2) = 0 = a\frac{1}{2} + 2b\cdot 2 + 1 = \frac{a}{2} + 4b + 1 \Rightarrow 0 = a + 8b + 2 \Rightarrow a = -2 - 8b$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} a = -2 - 8b \\ a = -1 - 2b \end{array}\right\} \Rightarrow -2 - 8b = -1 - 2b \Rightarrow -2 + 1 = -2b + 8b \Rightarrow -1 = 6b \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{6}}$$

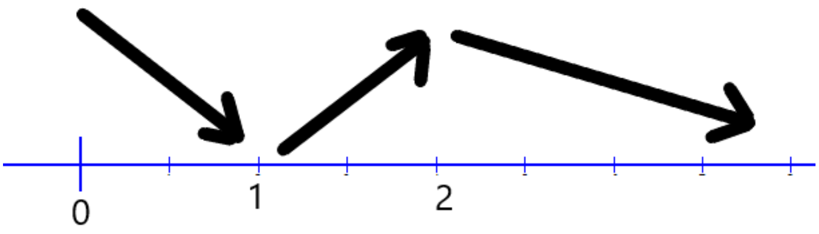
$$a = -1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right) = -1 + \frac{2}{6} = \frac{-6+2}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-2}{3}}$$

b) La función tiene la expresión $f(x) = -\frac{2}{3}\ln(x) - \frac{1}{6}x^2 + x \quad para \quad x > 0$ y su derivada es $f\,'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1.$

Veamos como evoluciona la función antes de *x = 1*, entre *x = 1* y *x = 2* y después de *x = 2.*

- En $(0,1)$ tomamos *x = 0,5* y la derivada es $f\,'(0,5) = -\frac{2}{3\cdot 0,5} - \frac{0,5}{3} + 1 = -0,5 < 0$, por lo que la función decrece en el intervalo $(0,1)$.
- En $(1,2)$ tomamos *x = 1,5* y la derivada es $f\,'(1,5) = -\frac{2}{3\cdot 1,5} - \frac{1,5}{3} + 1 = \frac{1}{18} > 0$, por lo que la función crece en el intervalo $(1,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada es $f\,'(3) = -\frac{2}{9} - \frac{3}{3} + 1 = -\frac{2}{9} < 0$, por lo que la función decrece en el intervalo $(2,+\infty)$.

Resumimos esta información en el siguiente gráfico y de ahí podemos establecer los máximos y mínimos relativos de la función.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Ejercicio 2.- Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-2x}$.

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=-2ex$.

b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $y=-2ex$ y el eje de ordenadas.

c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a) La recta tangente se obtiene a partir del valor de la función y su derivada en un punto $x = a$ tiene por ecuación: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$f(x)=e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=-2e^{-2x}$$

La recta tangente a la gráfica tiene ecuación

$$y-e^{-2a}=-2e^{-2a}(x-a)\Rightarrow y=-2e^{-2a}x+2ae^{-2a}+e^{-2a}\Rightarrow y=-2e^{-2a}x+(2a+1)e^{-2a}$$

Comparando esta ecuación con la que nos debe salir $y=-2ex$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}-2e^{-2a}=-2e\\(2a+1)e^{-2a}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}e^{-2a}=e\\(2a+1)e^{-2a}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2a=1\\2a+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2a=1\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

El punto de la gráfica es $x=-\frac{1}{2}$ y sustituyendo en la función $f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)}=e$.

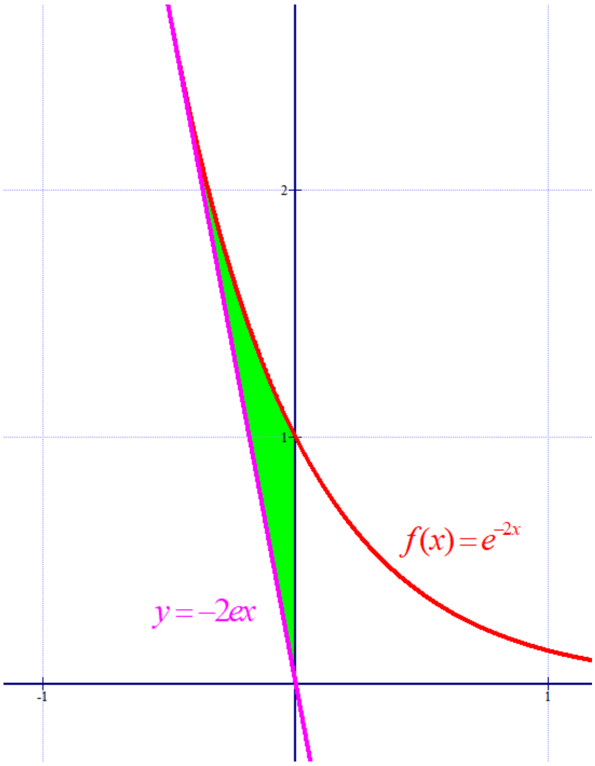
El punto de la gráfica tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2},e\right)$

b)

Para dibujar este recinto determinamos donde se cortan la recta y la tangente, que es el punto de tangencia $x=-\frac{1}{2}$.

Hacemos una tabla de valores para la función $f(x)=e^{-2x}$ y otra para la recta $y=-2ex$

El recinto es la zona marcada de verde.



c) El área del recinto es la integral definida entre –0,5 y 0 de la diferencia entre la función $f(x)=e^{-2x}$ y su tangente $y=-2ex$

$$\int_{-0,5}^{0} f(x)-\left(-2ex\right)dx=\int_{-0,5}^{0} e^{-2x}+2exdx=\left[\frac{e^{-2x}}{-2}+ex^2\right]_{-0,5}^{0}=\left[\frac{e^{-0}}{-2}+e\cdot 0^2\right]-\left[\frac{e^{-2(-0,5)}}{-2}+e\left(-0,5\right)^2\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}-\frac{e}{4}=-\frac{2}{4}+\frac{2e}{4}-\frac{e}{4}=\boxed{\frac{e-2}{4}=0,1796 \quad u^2}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ \quad y-\quad z=m \\ x+my+z=m \end{cases},$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.
b) [1 punto] Resuélvelo para *m = 1*. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que *z = 2*.

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=1-1+0-(m+0-m)=0$$

El rango de A es menor de 3.
Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$

El rango de A es 2, independientemente del valor de "*m*".

Consideremos la matriz ampliada asociada al sistema $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}$.

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix}=m+m+0-\left(m^2+0+m^2\right)=2m-2m^2$$

Lo igualamos a cero → $2m-2m^2=0 \Rightarrow 2m(1-m)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ ó \\ 1-m=0 \to m=1 \end{cases}$

Consideramos los 3 casos siguientes:

CASO 1. $m\neq 0$ *y* $m\neq 1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 de A/B es no nulo y el rango de A/B es 3, como el rango de A es 2 tenemos que los rangos son distintos y por tanto el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 2. $m=0$

El sistema queda $\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-y} \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y-z=0 \Rightarrow \boxed{z=y}$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).
Siendo las soluciones: $x=-\lambda;\ y=\lambda;\ z=\lambda$

CASO 3. $m=1$

El sistema queda $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{1^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ ecuación son iguales}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ \boxed{y=1+z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+(1+z)+z=1 \Rightarrow x+2z=0 \Rightarrow \boxed{x=-2z}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).
Siendo las soluciones: $x=-2\lambda;\ y=1+\lambda;\ z=\lambda$

b) Para $m=1$ las soluciones se han obtenido previamente y son $x=-2\lambda;\ y=1+\lambda;\ z=\lambda$.

Si queremos obtener una solución con *z* = *2* tomamos $\lambda=2 \Rightarrow \begin{cases} x=-2\cdot 2=-4 \\ y=1+2=3 \\ z=2 \end{cases}$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}.$$

a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de *m* y *n* para que *r* y *s* se cortan perpendicularmente.

b) **[1 punto]** Para *m = 3* y *n =1*, calcula la ecuación general del plano que contiene a *r* y a *s*.

a) Obtengamos un punto y el vector director de cada una de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, m, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - nz \\ y = -3 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - nz \\ y = -3 + z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (-n, 1, 1) \\ P_s(-2, -3, 0) \end{cases}$$

Para que se corten el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_r}; \overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_r P_s} = (-2, -3, 0) - (1, -1, 0) = (-3, -2, 0) \\ \overrightarrow{v_r} = (2, m, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-n, 1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 4 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{-3m + 2n + 7 = 0}$$

Y para que se corten perpendicularmente deben ser ortogonales los vectores directores, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (2, m, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-n, 1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (2, m, 1)(-n, 1, 1) = 0 \Rightarrow \boxed{-2n + m + 1 = 0}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} -3m + 2n + 7 = 0 \\ -2n + m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + 2n + 7 = 0 \\ m = 2n - 1 \end{cases} \Rightarrow -3(2n-1) + 2n + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6n + 3 + 2n + 7 = 0 \Rightarrow -4n + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{n = \frac{10}{4} = 2{,}5} \Rightarrow \boxed{m = 2 \cdot 2{,}5 - 1 = 4}$$

Los valores buscados son *m = 4* y *n = 2,5*

b) Para *m = 3* y *n =1* las rectas se cortan pues cumplen la condición obtenida

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ n = 1 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 = 0? \quad \text{¡SE CUMPLE!}$$

El vector normal del plano π que contiene a las dos rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3i-j+2k+3k-2j-i=2i-3j+5k=(2,-3,5)$$

El plano π contiene al punto P_r (1, –1,0) y tiene como vector normal $\vec{n}=(2,-3,5)$ por lo que su ecuación se obtiene de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(2,-3,5)\\ \mathrm{P_r}(1,-1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-3y+5z+D=0\\ \mathrm{P_r}(1,-1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2-3(-1)+0+D=0\Rightarrow D=-5$$

$$\boxed{\pi: 2x-3y+5z-5=0}$$