UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función *f(x)* verifica las hipótesis del teorema en el intervalo *[-2, 6]*. **(1 punto)**

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+z=a-4 \\ 2x+y-az=a-1 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = –1*. **(1 punto)**

4A. Dado el punto *P(2, 0,–1)* y las rectas

$$r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas *r* y *s*. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por *P* es paralelo a *r* y a *s*. **(1,5 puntos)**

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**
a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A. **(0,5 puntos)**

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**
b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ **(1,25 puntos por límite)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

2B. Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2-2x-4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de *g(x)* en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz *X* que verifica que $2X+C=A-X\ \cdot B$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos *P(0, 1, –2)* y *Q(4, –3, 0)*. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de *P* y *Q* y que pertenezca a la recta

$$r\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-5 \end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$ **(1,5 puntos)**

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función *f(x)* verifica las hipótesis del teorema en el intervalo *[-2, 6]*. **(1 punto)**

a) Para ser derivable debe ser continua. La función debe ser continua en *x = 2* y por tanto los límites laterales en *x = 2* deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2+a=4+a \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -x^2+bx-9=-4+2b-9 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 4+a=-4+2b-9 \Rightarrow \boxed{a=2b-17}$$

La función son dos polinomios que son derivables en $\mathbb{R}-\{2\}$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<2 \\ -2x+b & si \quad x>2 \end{cases}$$

Al ser derivable en *x = 2* las derivadas laterales deben de ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4 \\ f'(2^+)=-4+b \\ f'(2^-)=f'(2^+) \end{array}\right\} \Rightarrow 4=-4+b \Rightarrow \boxed{b=8}$$

Sustituyendo este valor en la igualdad obtenida por la continuidad.

$$\left.\begin{array}{l} a=2b-17 \\ b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=16-17=-1}$$

b) **Teorema de Rolle**. Si *f (x)* es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y *f(a) = f(b)* entonces existe al menos un *c* en (a, b) tal que *f ’(c)= 0.*

La función es $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & si \quad x>2 \end{cases}$

Esta función es continua en el intervalo *[-2, 6]* y derivable en dicho intervalo, pues lo es en todo $\mathbb{R}$.

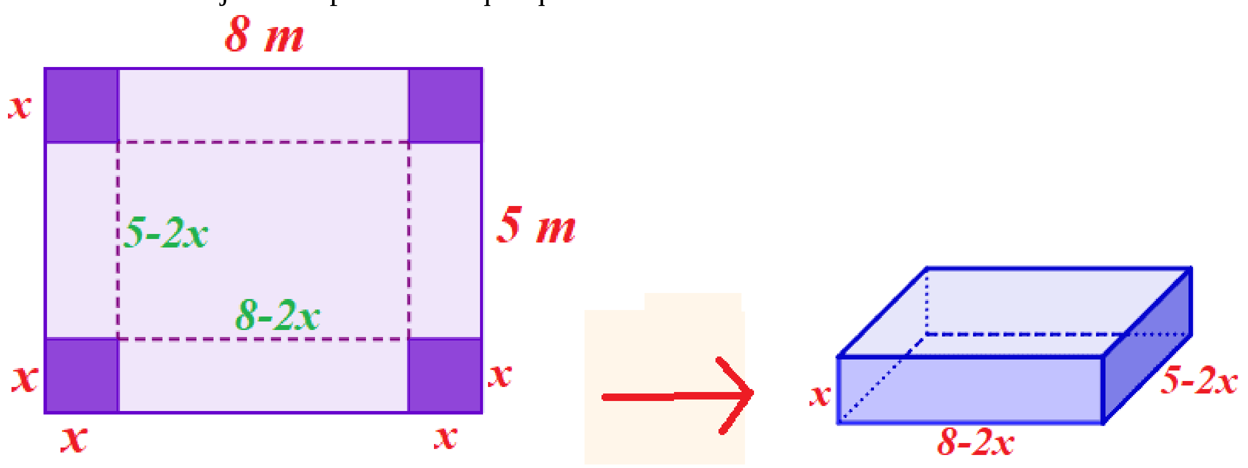
Además se cumple que *f(–2) = f(6).*

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2-1=4-1=3 \\ f(6)=-6^2+8\cdot 6-9=-36+48-9=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=f(6)=3$$

Se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle y existe, al menos, un valor *c* en el intervalo *[-2, 6]* donde se anula la derivada.

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Hacemos un dibujo descriptivo de lo que queremos hacer.



El volumen de la caja depende del valor del cuadrado que quitemos en las esquinas. Obtenemos la función que expresa este volumen.

$$V(x)=x(8-2x)(5-2x)=x\left(40-16x-10x+4x^2\right)=4x^3-26x^2+40x$$

Deseamos que el volumen de la caja sea máximo. Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$V(x)=4x^3-26x^2+40x \Rightarrow V'(x)=12x^2-52x+40$$

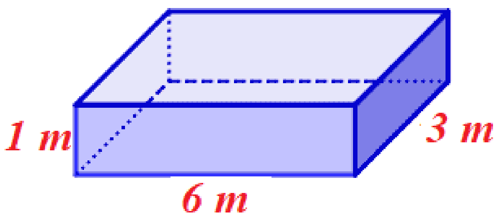
$$V'(x)=0\Rightarrow 12x^2-52x+40=0\Rightarrow 3x^2-13x+10=0\Rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 3\cdot 10}}{6}$$

$$x=\frac{13\pm 7}{6}=\begin{cases}\dfrac{13+7}{6}=\dfrac{10}{3}\\ \dfrac{13-7}{6}=1\end{cases}$$

Los puntos críticos de la función son $x=1$ y $x=\frac{10}{3}$. Usamos la segunda derivada para averiguar que tipo de punto crítico es cada uno.

$$V'(x)=12x^2-52x+40\Rightarrow V''(x)=24x-52\Rightarrow\begin{cases}V''(1)=24-52=-28<0\\ V''\left(\dfrac{10}{3}\right)=24\dfrac{10}{3}-52=28>0\end{cases}$$

La segunda derivada es negativa en $x = 1$ y es un máximo de la función volumen.
El cajón tendría las dimensiones expresadas en el dibujo.



3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a* = *–1*. **(1 punto)**

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 0 + 2 - 0 - 2 + a^2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Consideramos tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0 \text{ y } a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas.
El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (única solución)

CASO 2. $a = 0$

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} -y + z = -4 \\ 2x + y \quad = -1 \\ y - z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} y & -z & = & -3 \\ -y & +z & = & -4 \\ \hline & 0 & = & -7 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y + z = -4 \\ 2x + y \quad = -1 \\ 0 = -7 \end{array}\right\} \text{¡}IMPOSIBLE\text{!}$$

La tercera ecuación es imposible. El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

CASO 3. $a = 1$

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = -3 \\ 2x + y - z = 0 \\ y - z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2x & +y & -z & = 0 \\ -2x & +2y & -2z & = 6 \\ \hline & 3y & -3z & = 6 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = -3 \\ 3y - 3z = 6 \\ y - z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=-3 \\ y-z=2 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrl} y & -z & =-3 \\ -y & +z & =-2 \\ \hline & 0 & =-5 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=-3 \\ y-z=2 \\ 0=-5 \end{array}\right\} \text{¡}IMPOSIBLE\text{!}$$

La tercera ecuación es imposible. El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

b) Para el valor *a = –1* el sistema es compatible determinado.

El sistema a resolver es $\left.\begin{array}{r} -x-y+z=-5 \\ 2x+y+z=-2 \\ y-z=-3 \end{array}\right\}$. Lo resolvemos por el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+z=-5 \\ 2x+y+z=-2 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +z & =-2 \\ -2x & -2y & +2z & =-10 \\ \hline & -y & +3z & =-12 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y+z=-5 \\ -y+3z=-12 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrl} y & -z & =-3 \\ -y & +3z & =-12 \\ \hline & 2z & =-15 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y+z=-5 \\ -y+3z=-12 \\ 2z=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{15}{2}} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y-\frac{15}{2}=-5 \\ -y+3\left(-\frac{15}{2}\right)=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y-15=-10 \\ -y=-12+\frac{45}{2}=\frac{21}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y=5 \\ \boxed{y=-\frac{21}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+\frac{42}{2}=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x=5-21 \Rightarrow -2x=-16 \Rightarrow \boxed{x=8}$$

La solución es $x=8; \quad y=-\frac{21}{2}; \quad z=-\frac{15}{2}$

4A. Dado el punto *P(2, 0,–1)* y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas *r* y *s*. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por *P* es paralelo a *r* y a *s*. **(1,5 puntos)**

a) Obtengamos el vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1,2,0) \\ \mathrm{P_r}(2,-1,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2z-4 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-z-1)-y=-2z-4 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y=z-2z-4+1=-z-3 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z+3 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-1-t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \\ P_s(-1,3,0) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, luego las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{-1}{-1} = \frac{2}{1} = \frac{0}{1}? \quad \text{!NO ES CIERTO!}$$

¿Las rectas se cortan o cruzan?

Calculamos el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{v_r} = (-1,2,0)$, $\overrightarrow{v_s} = (-1,1,1)$ y el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,3,0)-(2,-1,0) = (-3,4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = 0-6+0+0-0+4 = -2 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo entonces las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) El plano π paralelo a *r* y *s* tiene como vectores directores los directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{v_r} = (-1,2,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1) \\ P(2,0,-1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-4-z-1+2z+2+y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x+y+z-3=0}$$

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

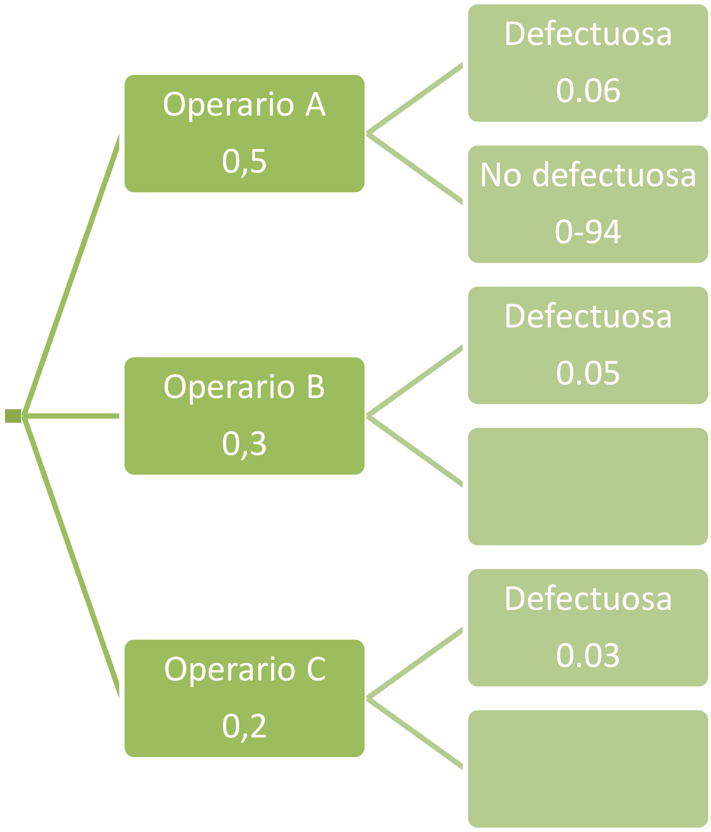
a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A. **(0,5 puntos)**

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

a) Construimos un diagrama de árbol.



a1) $P\left(Defectuosa\right) = 0.5 \cdot 0.06 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.03 = \boxed{0.051}$

a2)

$$P\left(\text{Operario A / Defectuosa}\right) = \frac{P\left(\text{Operario A} \cap \text{Defectuosa}\right)}{P\left(\text{Defectuosa}\right)} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.06}{0.051} = \boxed{\frac{30}{51} = 0.588}$$

b) La variable aleatoria X = Número de resistencias fabricadas por B es una variable aleatoria binomial. La probabilidad de que una resistencia sea de B es constantemente igual a 0.3. el experimento se repite 5 veces en cada caja.
Llamamos *Éxito = Ser del operario B.*

Siendo las repeticiones $n = 5$ y $p = P(\text{Éxito}) = 0.3$

b1) $P(X=3)=\boxed{0.1323}$. *Obtenido mirando en la tabla.*

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	[illegible]	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	[illegible]	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	[illegible]	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	[illegible]	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	[illegible]	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

b2)

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=0.3087+0.1323+0.0284+0.0024=\boxed{0.4718}$$

Obtenido mirando la tabla

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	[illegible]	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	[illegible]	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ **(1,25 puntos por límite)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

a)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{(-2)^3+3(-2)^2-4}{(-2)^3+5(-2)^2+8(-2)+4} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L´Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+6x}{3x^2+10x+8} = \frac{3(-2)^2+6(-2)}{3(-2)^2+10(-2)+8} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L´Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{6x+6}{6x+10} = \frac{6(-2)+6}{6(-2)+10} = \frac{-6}{-2} = \boxed{3}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x} = \frac{0\cdot\ln(0+1)}{2-2\cos 0} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L´Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)+x\frac{1}{x+1}}{-2(-senx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2senx} = \frac{\ln(0+1)+\frac{0}{0+1}}{-2(-sen0)} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L´Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}{2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2\cos x} = \frac{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}}{2\cos 0} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

2B. Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2-2x-4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de *g(x)* en el punto de abscisa *x = –3*. **(1 punto)**

a) Buscamos los puntos de corte de ambas funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x-4=-x^2\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow$$

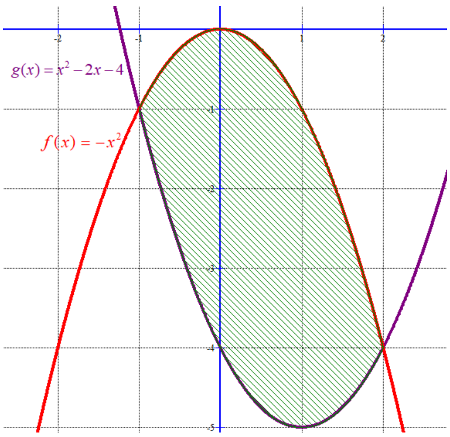
$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

El área del recinto limitado por las dos gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\left|\int_{-1}^{2}x^2-2x-4-\left(-x^2\right)dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}2x^2-2x-4dx\right|=\left|\left[2\frac{x^3}{3}-x^2-4x\right]_{-1}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left[2\frac{2^3}{3}-2^2-4\cdot 2\right]-\left[2\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-4(-1)\right]\right|=\left|\frac{16}{3}-4-8+\frac{2}{3}+1-4\right|=\boxed{9\,u^2}$$

Hacemos las gráficas y dibujamos el recinto para comprobar si este valor del área es correcto.



b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de *g(x)* en el punto de abscisa *x = –3* es:

$$y-g(-3)=\frac{-1}{g´(-3)}(x+3).$$

$$g(x)=x^2-2x-4\Rightarrow g(-3)=(-3)^2-2(-3)-4=9+6-4=11$$

$$g(x)=x^2-2x-4\Rightarrow g´(x)=2x-2\Rightarrow g´(-3)=2(-3)-2=-8$$

$$\left.\begin{array}{l} y-g(-3)=\frac{-1}{g´(-3)}(x+3)\\ g´(-3)=-8\\ g(-3)=11\end{array}\right\}\Rightarrow y-11=\frac{-1}{-8}(x+3)\Rightarrow 8y-88=x+3\Rightarrow\boxed{-x+8y-91=0}$$

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$? Razona la respuesta. *I₃* es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz *X* que verifica que $2X+C=A-X\cdot B$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos la expresión de la matriz $2I_3+B$.

$$2I_3+B=2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|2I_3+B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2+0+0-1-0-0=1\neq 0$$

Si tiene inversa la matriz $2I_3+B$.

b) Despejamos la matriz X de la ecuación

$$2X+C=A-X\cdot B\Rightarrow 2X+X\cdot B=A-C\Rightarrow X\left(2I_3+B\right)=A-C\Rightarrow X=\left(A-C\right)\left(2I_3+B\right)^{-1}$$

Hallamos la expresión de la matriz $A-C$ y la inversa de la matriz $2I_3+B$.

$$A-C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$2I_3+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left(2I_3+B\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(2I_3+B\right)^T\right)}{|2I_3+B|}$$

$$\left(2I_3+B\right)^{-1}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Seguimos calculando la matriz X.

$$X = (A-C)(2I_3+B)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2+12 & -3 & 1-6 \\ 4-8 & 2 & -2+4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos *P(0, 1, –2)* y *Q(4, –3, 0)*. **(1 punto)**
b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de *P* y *Q* y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$ **(1,5 puntos)**

a)

$$\left.\begin{array}{l} P(0,1,-2) \in r \\ \vec{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (4,-3,0) - (0,1,-2) = (4,-4,2) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1-4\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \lambda \\ y = 1-4\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1-4\dfrac{x}{4} \\ z = -2+2\dfrac{x}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ z = -2+\dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2z = -4+x \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ -x+2z+4=0 \end{cases}}$$

b) Todos los puntos que equidistan de los puntos P y Q constituyen un plano que pasa por el punto medio M del segmento PQ y perpendicular al vector que une ambos puntos.
Hallamos la ecuación de ese plano y después hallamos el punto de corte del plano y la recta *r*, siendo este el punto S buscado.

Hallamos el punto medio M del segmento PQ.

$$M = \frac{(0,1,-2)+(4,-3,0)}{2} = (2,-1,-1)$$

Hallamos la ecuación del plano que pasa por M y perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$ y que por tanto su vector normal es dicho vector.

$$\left.\begin{array}{l} M(2,-1,-1) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (4,-4,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M(2,-1,-1) \in \pi \\ \pi \equiv 4x-4y+2z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 2 - 4(-1) + 2(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+4-2+D=0 \Rightarrow D=-10 \Rightarrow \pi \equiv 4x-4y+2z-10=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-2y+z-5=0$$

Hallamos el punto de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x-2y+z-5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+\lambda) - 2(-\lambda) + (-5) - 5 = 0 \Rightarrow 4+2\lambda+2\lambda-5-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=-5 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2},-5\right)$$

El punto buscado es $S\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2},-5\right)$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

El punto S que equidista de P y Q y que pertenece a la recta r tiene las coordenadas:

$$S \in r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-5 \end{cases} \Rightarrow S(2+\lambda,-\lambda,-5)$$

Y la distancia de S a P y Q es la misma, lo que implica que los vectores $\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{SQ}$ tienen el mismo módulo.

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{SP}=(0,1,-2)-(2+\lambda,-\lambda,-5)=(-2-\lambda,1+\lambda,3) \\ \overrightarrow{SQ}=(4,-3,0)-(2+\lambda,-\lambda,-5)=(2-\lambda,-3+\lambda,5) \\ \left|\overrightarrow{SP}\right|=\left|\overrightarrow{SQ}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-2-\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(3)^2}=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-3+\lambda)^2+(5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2-\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(3)^2=(2-\lambda)^2+(-3+\lambda)^2+(5)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+4\lambda+\cancel{\lambda^2}+1+2\lambda+\cancel{\lambda^2}+9=4-4\lambda+\cancel{\lambda^2}+9-6\lambda+\cancel{\lambda^2}+25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14+6\lambda=38-10\lambda \Rightarrow 16\lambda=24 \Rightarrow \lambda=\frac{24}{16}=\frac{3}{2} \Rightarrow S\left(2+\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-5\right) \Rightarrow \boxed{S\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2},-5\right)}$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

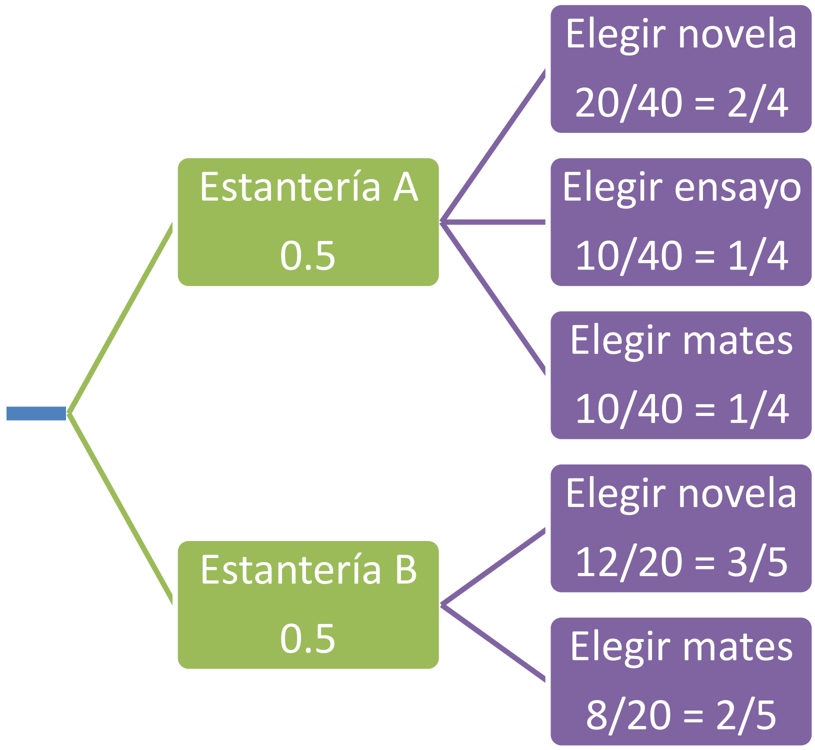
a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a) Realizo un diagrama de árbol del experimento aleatorio planteado.



a1) $P\left(\text{Elegir mates}\right) = 0.5 \cdot \frac{1}{4} + 0.5 \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{13}{40}}$

a2)

$$P\left(\text{Estanteria B / Elegido mates}\right) = \frac{P\left(\text{Estanteria B } \cap \text{ Elegir mates}\right)}{P\left(\text{Elegir mates}\right)} = \frac{0.5 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{13}{40}} = \boxed{\frac{8}{13}}$$

b)

X = tiempo de espera en una parada de autobús.
X = N(15, 5)

b1)

$$P(X<13)=\{\text{Tipificamos}\}=P\left(\frac{X-15}{5}<\frac{13-15}{5}\right)=P(Z<-0.4)=$$

$$=P(Z>0.4)=1-P(Z<0.4)=\{\text{Miramos en la tabla}\}=1-0.6554=\boxed{0.3446}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

b2) Hay que buscar el valor "a" tal que $P(X>a)=0.33$.

$$P(X>a)=0.33\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(\frac{X-15}{5}>\frac{a-15}{5}\right)=0.33\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z>\frac{a-15}{5}\right)=0.33\Rightarrow 1-P\left(Z<\frac{a-15}{5}\right)=0.33\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{a-15}{5}\right)=1-0.33=0.67\Rightarrow\{\text{Buscamos en la tabla}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a-15}{5}=0.44\Rightarrow a-15=2.2\Rightarrow\boxed{a=17.2\text{ minutos}}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

El 33% de los usuarios supera los 17.2 minutos.